



OPPGAVER I AUDITORIET 17/4
EMNE TMA4245 STATISTIKK
VÅREN 2008

Oppgave 1

$X_1, \dots, X_n$ er uavhengige og identisk fordelte TV med ST

$$f_X(x) = e^{-(x-\theta)}, \quad x \geq \theta > 0, \\ = 0, \text{ ellers} \quad (1)$$

- a) Vis at for $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, er $2n(Y - \theta)$ χ^2 -fordelt med 2 frihetsgrader.
- b) Vis at $V = 2 \sum_{j=1}^n (X_j - \theta)$ er χ^2 -fordelt med $2n$ frihetsgrader.
- c) Hypotesen $H_0 : \theta = 0$ testes mot den alternative hypotesen $H_1 : \theta > 0$. Følgende to tester er foreslått:
- T_1 : Forkast H_0 når $Y \geq k_1$.
- T_2 : Forkast H_0 når $\bar{X} \geq k_2$.

Signifikansnivå $\alpha = 0.05$ gjelder i begge testene.

1. Anta $n = 10$, og bestem k_1 og k_2 .
2. Hvor stor må n være for dersom T_1 skal ha teststyrke minst 0.95 i alternativet $\theta = 1.0$?
3. Hvor stor må n være for dersom T_2 skal ha teststyrke minst 0.95 i alternativet $\theta = 1.0$?
4. Hva synes resultatene i 2) og 3) å tyde på?

Oppgave 2

En fabrikk produserer en viss type maskinkomponenter. Tiden fra en komponent blir tatt i bruk til den bryter sammen for første gang, kaller vi levetiden for komponenten. Erfaring har vist at levetiden T , målt i uker, kan modelleres som en stokastisk variabel med ST:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= 2\lambda t e^{-\lambda t^2}, & t \geq, \\ &= 0, & \text{ellers,} \end{aligned} \tag{2}$$

der $\lambda > 0$ er en ukjent parameter.

- a) Bestem kumulativ fordelingsfunksjon (KF) $F_T(t)$ til T , og beregn $P(20 < T \leq 30)$ når $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-3}$.
- b) Vis at $Z = 2\lambda T^2$ er χ^2 -fordelt med 2 frihetsgrader.
- c) Parameteren λ skal estimeres på basis av levetidene $T_1, \dots, T_n$ for $n > 2$ tilfeldig valgte komponenter. $T_1, \dots, T_n$ antas uavhengige og identisk fordelte med ST $f_T(t)$. Vis at sannsynlighetsmaksimerings-estimatoren (SME) for λ blir

$$\Lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n T_i^2}. \tag{3}$$

- d) La X være χ^2 -fordelt med $2n$ frihetsgrader ($n > 2$). Vis at

$$E(X^{-1}) = \frac{1}{2(n-1)} \quad \text{og} \quad E(X^{-2}) = \frac{1}{4(n-1)(n-2)}. \tag{4}$$

Bruk dette til å undersøke om Λ^* er forventningsrett. Om nødvendig, korrigér for å få en estimator som er forventningsrett. Bestem denne estimatorens varians.

- e) ...