Kapittel 7: Funksjoner av stokastiske variabler

TMA4240 Statistikk (F2 og E7)

Foreleses onsdag 22. september, 2004.

Problem og notasjon

Eksempler:

- Hovedkarakter NTNU: I hvert fag fordeler karakteren seg i forhold til en sannsynlighetsfordeling. Hovedkarakter er et vektet gjennomsnitt av karakterene i alle fag. Hvilken fordeling har hovedkarakteren?
- Gass: Vi har en ideell gass i en tett beholder, $pV = nRT$. Vi har målt trykk (p), volum (V) og temperatur (T) med usikkerhet og vil vite fordelingen til antall mol av gassen (n).
- Vindmølle: Vi skal konstruere en vindmølle for energiproduksjon. Vindmøllen må tåle kraftige vinder (og produsere maksimalt med energi). Hvor karftige vinder må vindmøllen tåle?

Notasjon:

- Har n stokastiske variabler, X_1,X_2,. . .,X_n, med kjent fordeling $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og kumulativ fordeling $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Ser på $Y = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, der u er en kjent funksjon. Hva er fordelingen til Y?

Løsninger

Alt 1 Fra kumulativ fordeling (notat om ordningsvariable):

- Jobber med kumulativ fordeling $P(Y \leq y)$ og finner derifra fordeling $g(y)$ (derivere eller ta differanser).
- Vi skal gjøre dette for ekstremvariabler (når X-ene er uavhengige). For generelle situasjoner kan det bli mye regning.

Alt 2 Transformasjonsformler (kap. 7.2):

- Jobber direkte med fordelingen $g(y)$ for generell avhengighetsstruktur.
- Brukes mest for en-til-en transformasjon av EN stokastisk variabel.
- Formel i formelsamling

Alt 3 Momentgenererende funksjoner (kap. 7.3):

- En transformasjon som tar oss over i et annet rom.
- Det er enkelt å finne fordelingen til Y="lineærkombinasjon av uavhengige stokastiske variabler".
- Kan også enkelt finn momenter til Y.

Transformasjon av en kontinuerlig variabel

TEO 7.5: Anta at X er en kontinuerlig stokastisk variabel med fordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$ være en transformasjon mellom verdiene av X og verdiene av Y som ikke er en-til-en. Hvis intervallet som X er definert på kan deles inn i k disjunkte intervaller slik at for hvert intervall så er de inverse funksjonene en-til-en.

$$x_1 = w_1(y), \qquad x_2 = w_2(y), \qquad \ldots \qquad x_k = w_k(y)$$

Da er fordelingsfunksjonen til Y

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f[w_i(y)]|J_i|.$$

der $J_i = w_i'(y) = \frac{dw_i(y)}{dy}$ for $i = 1, ..., k$

Momenter og MGF

TEO 7.7: Unikhet La X og Y være to stokastiske variabler med moment-genererende funksjoner $M_X(t)$ og $M_Y(t)$. Hvis $M_X(t) = M_Y(t)$ for alle verdier av t, så har X og Y samme fordeling.

TEO 7.8:

$$M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$$

Bevis:

$$M_{X+a}(t) = E[e^{t(X+a)}] = e^{at} E(e^{tX}) = e^{at} M_X(t)$$

Momenter og MGF

TEO 7.9:

$$M_{aX}(t) = M_X(at)$$

Bevis:

$$M_{aX}(t) = E[e^{t(aX)}] = E(e^{(at)X}) = M_X(at)$$

TEO 7.10: Hvis $X_1, X_2, ..., X_n$ er uavhengige stokastiske variabler med momentgenererende funksjoner $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), ..., M_{X_n}(t)$, og $Y = X_1 + X_2 + \cdots X_n$. Da er

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

Sum av *uavhengige* normalfordelte variabler

TEO 7.11 Hvis $X_1, X_2, ..., X_n$ er uavhengige normalfordelte stokastiske variabler med forventninger $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ og varianser $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2$, så er

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

også normalfordelt med forventning

$$\mu_Y = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \cdots + a_n \mu_n$$

og varians

$$Y = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + a_n^2 \sigma_n^2$$

Sum av *uavhengige* kjikvadrat-fordelte variabler

TEO 7.12 Hvis $X_1, X_2, ..., X_n$ er uavhengige kjikvadratfordelte stokastiske variabler med $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ frihetsgrader, så er

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

en kjikvadratfordelt stokastisk variabel med $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$ frihetsgrader.

COR Hvis $X_1, X_2, ..., X_n$ er uavhengige normalfordelte stokastiske variabler, der alle har forventning μ og varians σ^2, da er den stokastiske variabelen

$$Y = \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2$$

kjikvadratfordelt med $\mu = n$ frihetsgrader.