

Oppgavesamling nr. 86 / Mai 2001 nr 2

Det skal tas blodprøve av samtlige soldater i en militæravdeling for å finne ut om noen er smittet av en bestemt sykdom. Sannsynligheten for at blodprøven fra en tilfeldig valgt soldat er positiv (dvs. at han er smittet) antas å være lik p , og testresultatene for ulike individer antas å være uavhengige.

Man går frem på følgende måte: Blodprøver tas av $k(> 1)$ soldater om gangen, blodprøvene blandes og blandingen analyseres. Hvis den gir positiv reaksjon, noe som betyr at minst en av soldatene er smittet, tas nye blodprøver av de k , og prøvene analyseres enkeltvis. Hvis blandingen gir negativ reaksjon, blir det ikke tatt flere prøver.

- a) Begrunn hvorfor antall smittede i en k -gruppe er binomisk fordelt og vis at sannsynligheten for at en blanding av k blodprøver skal gi positiv reaksjon er

$$1 - (1 - p)^k.$$

- b) Hvordan defineres betinget sannsynlighet for en hendelse A gitt en annen hendelse B ? Soldat 19 Haugen får beskjed om at hans k -gruppe har vist positiv reaksjon. Hva er da sannsynligheten for at han er positiv?
- c) Anta at en avdeling består av m grupper, hver med k soldater, slik at det totale antallet soldater er mk . La X være antall blodprøver som må analyseres før hele avdelingen er ferdig kontrollert. Vis at

$$E(X) = mk \left(1 + \frac{1}{k} - (1 - p)^k \right).$$

Hvis $k = 4$, for hvilke verdier av p er den benyttede fremgangsmåten å foretrekke i stedet for å analysere blodprøvene enkeltvis med en gang?

Oppgavesamling nr. 89 / August 2001 nr 1

La A og B være to hendelser hvor $P(A \cap B) > 0$. La hendelsene C og D være gitt ved at $C = A \cap B$ og $D = A \cap B'$, der B' er komplementærhendelsen til B .

Tegn hendelsene A og B inn i et venndiagram og skraver i dette venndiagrammet hendelsene C og D .

Er hendelsene C og D disjunkte? (Begrunn svaret)

Er hendelsene C og D uavhengige? (Begrunn svaret)

Oppgavesamling nr. 90 / August 2001 nr 2

La X og Y være to uavhengige normalfordelte stokastiske variable, der $E(X) = E(Y) = 1$, $\text{Var}(X) = 1$ og $\text{Var}(Y) = 4$.

Bestem følgende sannsynligheter

$$P(X \leq 2) \quad , \quad P(X \leq 2 \cap Y \leq 1) \quad \text{og} \quad P(X + 2Y > 2).$$

Oppgavesamling nr. 93 / November 2001 nr 1

Lottotipping

I denne oppgaven skal vi analysere to forskjellige aspekter ved lottotipping.

I lotto spiller en deltager en enkelttrekke ved velge 7 av 34 tall. Det er ogs tillatt spille system. Nr en deltager spiller system velger deltageren ut m av 34 tall, hvor m betegner antall tall i systemet. Nr en deltager spiller et system av strekke m , vil antall enkelttrekker som spilles vre lik antall mulige kombinasjoner av 7 tall blant de m tallene i systemet.

- a) Hvor mange enkelttrekker spilles i et system som inneholder 8 tall?

Hvor mange enkelttrekker spilles i et system som inneholder m tall?

Nr en leverer inn en lottokupong, m en betale kr 3,- per enkelttrekke som spilles. Hvor mye koster det levere inn et system med 12 tall? (Dette er det strste systemet som er tillatt av Norsk Tipping.)

Det finnes totalt 5 379 616 mulige enkelttrekker i lotto. Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt rekke skal sammenfalle med vinnerrekka er dermed $p = (5\,379\,616)^{-1} \approx 1.86 \cdot 10^{-7}$. I trekningen den 17. november, ble det spilt $n = 21\,481\,335$ rekker. I denne oppgaven skal vi regne som om alle de n rekkene som ble spilt, var trukket tilfeldig og uavhengig av hverandre blant mengden av mulige enkelttrekker. La X betegne antall enkelttrekker som sammenfaller med vinnerrekka, dvs. antall vinnere av toppgevinsten. Under antagelsene over kan X regnes som binomisk fordelt, $b(x; n, p)$.

- b) Under hvilke betingelser kan en binomisk fordeling tilnrmes med en poissonfordeling?

Beregn poissontilnrmelsen for fordelingen til X .

Beregn punktsannsynlighetene for hendelsene $X = 0$ og $X = 1$, bde for den eksakte binomiske fordelingen og for poissontilnrmelsen. Er poissontilnrmelsen rimelig i dette tilfellet ?

Oppgavesamling nr. 102 / November 2002 nr 1

Skader av jordskjelv

Ein by ligg i eit område som er utsett for jordskjelv. Det neste jordskjelvet som rammar området, kan klassifiserast som kraftig (K), moderat (M) eller svakt (S). Ein vilkårlig bygning av ein bestemt type vil svikte dersom akkumulert skade D blir større enn ein kritisk verdi $d_0 = 1.0$. Gå ut i frå at D for kvar av dei tre jordskjelvklassene kan modellerast som ein tilfeldig variabel med sannsynstettleik

$$f_D(d) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda d} & , \quad d \geq 0 \\ 0 & , \quad d < 0. \end{cases}$$

Parameteren $\lambda > 0$ har ein verdi bestemt av intensiteten til jordskjelvet. Ein har funne at dei tre jordskjelvklassene, K , M og S har tilhøyrande parameterverdier $\lambda_K = 1.61$, $\lambda_M = 3.00$ og $\lambda_S = 4.60$.

- a) Bestem for kvar av dei tre jordskjelvklassane sannsynet for at ein vilkårleg bygning av den bestemte typen skal svikte.

Det er estimert at neste jordskjelv som rammar området, vil vere kraftig, moderat eller svakt med sannsyn i gitt rekkjefølgje $P(K) = 0.02$, $P(M) = 0.20$ og $P(S) = 0.78$.

- b) Bestem sannsynet for at ein bygning av den bestemte typen sviktar i neste jordskjelv.

Kva er sannsynet for at jordskjelvet var moderat dersom bygningen sviktar?

Gå ut i frå at A og B representerer to bygningar av den bestemte typen. Det er estimert at dersom bygning A sviktar, så er sannsynet for at bygning B og sviktar lik 0.50 for K , 0.15 for M og 0.02 for S .

- c) Bestem sannsynet for at begge bygningane sviktar i neste jordskjelv.

Kva er sannsynet for at jordskjelvet ikkje var kraftig dersom bygning A svikta etter eit jordskjelv medan bygning B ikkje svikta?

Oppgavesamling nr. 105 / Mai 2003 nr 1

La X være høyden til en tilfeldig valgt 6-årig jente. Vi antar at høyden er normalfordelt med forventning $E(X) = 115$ cm og standardavvik $SD(X) = 5$ cm.

- a) Beregn sannsynlighetene

$$P(X \leq 120) \text{ og } P(120 < X \leq 125).$$

Vi lar videre følgende hendelser være definert:

$$A: X \leq 120$$

$$B: X > 125$$

Er A og B disjunkte? Er A og B uavhengige? Begrunn svarene.

Vi tenker oss at vi går til år 2010, og er interessert i jentenavn blant førsteklasinger, dvs. blant de som er født i 2004. Navnestatistikken viser at 2% av jentene som ble født dette året fikk navnet Maud.

- b) La Z være antall jenter som heter Maud i en tilfeldig valgt førsteklasse der det er n jenter. Forklar hvorfor det er rimelig å anta at Z er binomisk fordelt med parametre n og p , der $p = 0.02$.

Vi vil i resten av oppgaven anta at Z er binomisk fordelt med $n = 15$ og $p = 0.02$. La hendelsene C og D være definert ved

$$C: \text{ minst en av jentene i klassen heter Maud}$$

$$D: \text{ akkurat to jenter i klassen heter Maud}$$

Beregn sannsynlighetene $P(C)$ og $P(D | C)$.

Anta at det er totalt 25 elever i klassen. Hva er da sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev blant alle elevene i klassen heter Maud?