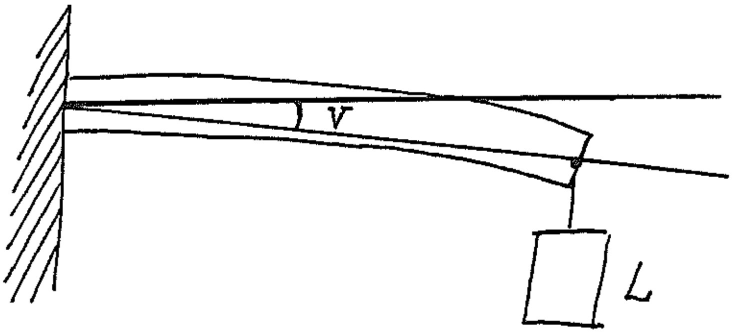
Oppgave 4 MATERIALPRØVING

Kvalitetssikringsavdelingen i en større bedrift skal evaluere stivheten til et materiale. Det skal gjøres ved laboratorieforsøk. En bruker en 1 meter lang stav av materialet; fester det i den ene enden; henger på en last L i andre enden; og måler vinkelutslaget V.



Forsøket utføres på en rekke staver av materialet og en ønsker å bestemme egenskaper representative for materialet.

Første del av forsøket består i å måle vinkelutslaget V uten last, dvs. ved $L = 0$. Dette utslaget skyldes egentyngden av materialet.

Det utføres forsøk på 10 staver og disse kan betraktes som uavhengige identisk fordelte. Følgende observasjoner gjøres:

Måling nr.	Last l (kg)	Vinkelutslag v (rad)
1	0.0	0.00954
2	0.0	0.00872
3	0.0	0.00753
4	0.0	0.01048
5	0.0	0.01115
6	0.0	0.01108
7	0.0	0.00953
8	0.0	0.01022
9	0.0	0.01159
10	0.0	0.00875

TABELL 1: Vinkelutslag

a) Lag en figur som viser frekvens histogrammet for V gitt ved $L = 0$. Bruk 5 klasser med grensene, 0.0075, 0.0085, 0.0095, 0.0105, 0.0115, 0.0125.

Gi uttrykkene for og beregn empirisk forventningsverdi (gjennomsnitt), empirisk median og empirisk varians.

Det er rimelig å anta at det er en lineær sammenheng mellom forventet vinkelutslag og den last som henges på, innen det området av laster en ønsker å teste:

$$E[V|L = l] = a + bl$$

b) Forklar at en rimelig estimator for konstantleddet a basert på observasjonene fra første del av forsøket, er den empiriske forventningsverdi (gjennomsnitt). Forklar hvorfor det er rimelig å anta at denne estimatoren er normalfordelt (Gaussisk fordelt). Beregn forventningsverdien og variansen til estimatoren for konstantleddet.

En estimator for denne variansen kan defineres vha den empiriske variansen i spørsmål a). Vis at denne estimatoren er forventningsrett dersom en antar at observasjonene er normalfordelte (Gaussisk fordelte).

Første del av forsøket utvides til å omfatte et så stort antall forsøk at konstantleddet i den lineære relasjonen kan antas å være kjent lik a_0. Likeledes antas variansen i forsøket å være kjent lik σ_0^2 samt uavhengig av lasten som henges på. En antar videre at observasjonene av vinkelutslag på ulike staver gitt samme last er normalfordelt (Gaussisk fordelt).

Forsøket utvides nå til å omfatte forsøk med varierende laster, l_i ; $i = 1, ..., n$ og de tilhørende observerte vinkelutslagene er v_i ; $i = 1, ..., n$.

c) Bruk sannsynlighetsmaksimeringsprinsippet (maximum likelihood) til å definere en estimator for koeffisienten, b, i lineærleddet i den lineære relasjonen mellom forventet vinkelutslag og last. Hele utledningen av uttrykket for estimatoren skal spesifiseres.

Vis at minste kvadratsums estimatoren for koeffisienten b, gir samme estimator som sannsynlighetsmaksimeringsprinsippet.

Vis at estimatoren er forventningsrett og utled et uttrykk for variansen til estimatoren.

I en grundigere statistisk studie av konstantleddet a ønsker en å bruke empirisk median som estimator. Anta nå at V ved $L = 0$ har en vilkårlig deriverbar fordelingsfunksjon

$$V \sim \; P(V \leq v) = F_V(v)$$

d) La V_1, V_2, V_3 være et tilfeldig utvalg av størrelse tre av V med $L = 0$. Definer

$$\Theta \; = \; \text{median}\, \{V_1,\, V_2,\, V_3\}$$

Utled sannsynlighetstettheten til Θ, $f_\Theta(\theta)$, uttrykt ved $F_V(\cdot)$.

Dersom en antar at sannsynlighetstettheten $f_V(v)$ er symmetrisk, vil Θ være en forventningsrett estimator for a.

Anta at $f_V(v)$ er symmetrisk, i hvilke tilfeller tror du det vil være bedre å bruke empirisk median enn empirisk forventningsverdi (gjennomsnitt) som estimator for a?