TMA4240/TMA4245 Statistikk
Ordningsvariabler og ekstremvariabler

1 Ordningsvariabler

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige, identisk fordelte stokastiske variabler med fordeling $f_X(x)$ og kumulativ fordeling $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Vi ordner X_i-ene etter størrelse og betegner dem $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$, hvor

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(k)} \leq \ldots \leq X_{(n)}.$$

Vi kaller $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ ordningsvariabler.

Spesielt definerer vi ekstremvariablene

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ X_{(n)} &= \max(X_1, X_2, \ldots, X_n). \end{aligned}$$

Medianen er definert ved:

$$\tilde{X} = \begin{cases} X_{((n+1)/2)} & \text{hvis } n \text{ er oddetall} \\ \frac{1}{2}(X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)}) & \text{hvis } n \text{ er partall} \end{cases}$$

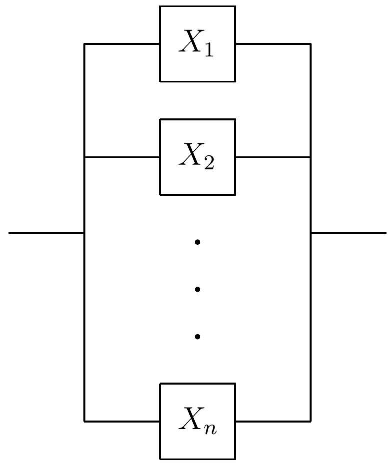
Variasjonsbredden ("range" på engelsk) er definert ved: $X_{(n)} - X_{(1)}$.

2 Maksimum

2.1 Parallellsystem og maksimum

I systemer eller delsystemer der det stilles høye krav til at systemet skal virke kobles ofte komponenter i parallell:

Systemet virker så lenge minst en av komponentene virker. Levetiden til systemet blir $V = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.



2.2 Fordelingen til maksimum

Fordelingen til $V = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ kan finnes ved å benytte at den største av X_i-ene er mindre enn eller lik v hvis og bare hvis alle X_i-ene er mindre enn eller lik v:

$$\begin{aligned}
F_V(v) = P(V \leq v) &= P(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq v) \\
&= P((X_1 \leq v) \cap (X_2 \leq v) \cap \ldots \cap (X_n \leq v)) \\
&\overset{uavh.}{=} P(X_1 \leq v) \cdot P(X_2 \leq v) \cdots P(X_n \leq v) \\
&= [F_X(v)]^n
\end{aligned}$$

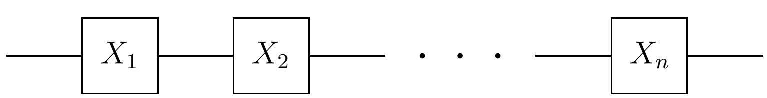
Hvis X er kontinuerlig fordelt blir:

$$f_V(v) = \frac{d}{dv} F_V(v) = n[F_X(v)]^{n-1} f_X(v)$$

3 Minimum

3.1 Seriesystem og minimum

La oss se på levetiden til et system sammensatt av komponenter med uavhengige levetider. I første omgang ser vi på et system som virker hvis og bare hvis samtlige komponenter virker. Dette kan illustreres ved en seriekobling:



La X_i være levetiden til komponent nr i. Systemet funksjonerer frem til første komponent svikter. Da er levetiden til systemet $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

3.2 Fordelingen til minimum

Fordelingen til $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ blir på tilsvarende måte:

$$
\begin{aligned}
F_U(u) = P(U \le u) &= P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le u) \\
&= 1 - P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > u) \\
&= 1 - P((X_1 > u) \cap (X_2 > u) \cap \ldots \cap (X_n > u)) \\
&\overset{uavh.}{=} 1 - P(X_1 > u) \cdot P(X_2 > u) \cdots P(X_n > u)) \\
&= 1 - [1 - F_X(u)]^n
\end{aligned}
$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt blir:

$$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u) = n[1 - F_X(u)]^{n-1} f_X(u)$$

3.3 Eksponensialfordeling og minimum:

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige, eksponensialfordelte levetider med forventning β. Dvs $f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$ for $x \ge 0$, $\beta > 0$. Fordelingen til $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ blir:

$$
\begin{aligned}
F_U(u) = P(U \le u) &= P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le u) \\
&= 1 - [1 - F_X(u)]^n \\
&= 1 - [1 - \int_0^u f_X(x) dx]^n \\
&= 1 - [1 - \int_0^u \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx]^n \\
&= 1 - [1 - (1 - e^{-\frac{u}{\beta}})]^n \\
&= 1 - e^{-\frac{nu}{\beta}} \qquad\qquad \text{for } x > 0
\end{aligned}
$$

Altså er levetiden til seriesystemet eksponensialfordelt med forventning $\frac{n}{\beta}$. I oppgave 2 (til slutt i notatet), skal vi se at minimum av Weibull-fordelte størrelser også er Weibull-fordelt.

4 $k$te ordningsvariabel

Fordelingen til $X_{(k)}$ blir

$$F_{X_{(k)}}(x) = P(k \text{ eller flere } X_i\text{-er er } \le x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} [F_X(x)]^j [1 - F_X(x)]^{n-j}$$

fordi antallet $X_i \leq x$ er binomisk fordelt med parametre n og $F_X(x)$.

Sannsynlighetstettheten finnes ved å derivere m.h.p. x og etter noe mellomregning kan den skrives:

$$f_{X_{(k)}}(x) = n\binom{n-1}{k-1}[F_X(x)]^{k-1}[1-F_X(x)]^{n-k}f_X(x)$$

5 Oppgaver

Oppgave 1. Betrakt et parallellsystem av 2 uavhengige komponenter. Levetiden til hver komponent er eksponensialfordelt med parameter λ, dvs

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

La V være levetiden til systemet. Finn fordelingen til V, samt $\mathrm{E}(V)$.

Oppgave 2. Betrakt et seriesystem sammensatt av n komponenter. Levetiden til hver komponent følger en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjonen

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-(\lambda x)^\alpha} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $\lambda > 0$ og $\alpha > 0$. Dette kalles en Weibull-fordeling med skalaparameter λ og formparameter α. (Parametriseringen er litt anderledes enn i læreboka.)

Finn den kumulative fordelingsfunksjonen for levetiden til systemet. Hva kalles denne sannsynlighetsfordelingen?