Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Arvid Næss 73 59 70 53/ 99 53 83 50

EKSAMEN I EMNE TMA4265 STOKASTISKE PROSESSER

2. juni 2004
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Ett gult A5-ark med stempel med egne formler og notater

Sensuren faller: 23. juni 2004

Oppgave 1

En Markov-kjede X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ med tilstandsrom $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ har overgangsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

a) Hvilke krav må være oppfylt for at du sikkert kan vite at en Markov-kjede har en grensefordeling? Påvis at disse kravene er oppfylt her.

b) Bestem grensefordelingen.

c) Overgangsmatrisen endres til

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Påvis at den tilhørende Markov-kjeden ikke har noen grensefordeling.

Den kan likevel ha en stasjonærfordeling. Hvis så er tilfelle, bestem denne. Hva uttrykker denne fordelingen?

Oppgave 2

Denne oppgaven er relatert til studier av læring hos laboratorierotter. Vi skal anta en situasjon hvor en rotte plasseres i et av rommene i et langt bur bestående av seks rom, som vist på figur 1. Mellom rommene er det dører som kan åpnes og lukkes. I rommet helt til høyre er det plassert mat, mens rommet helt til venstre er utformet slik at rotta der får et passende elektrisk sjokk. Vi skal anta at forsøksoppsettet kan utformes slik at det er like sannsynlig at rotta går inn i rommet til høyre som i rommet til venstre, unntatt når rotta er i et av enderommene. Ett tidssteg markerer endring av rottas romplassering. Forsøket avsluttes når rotta når et av enderommene.

1	2	3	4	5	6

Figur 1: Forsøksoppsett for rotteforsøk

a) La X_n betegne rottas romnummer ved tidssteg n. Argumentér kort for at X_n vil være en Markov-kjede når enderommene betraktes som absorberende tilstander. Skriv opp overgangsmatrisen.

Anta at rotta plasseres i rom nr. 4 ved forsøkets start. Bestem sannsynligheten for at rotta finner maten.

Rotta gjennomgår samme forsøk en gang til etter en nærmere angitt tid. Disse to forsøkene gjennomføres for et stort antall rotter, og alltid med start i rom nr. 4. En analyse av resultatene viser at en andel på 0.9 av rottene som fant mat i første forsøk, også fant maten i det andre forsøket. Tilsvarende andel for de andre rottene var 0.8. Dette antyder at det er en læringseffekt til stede, og at denne er størst for de rottene som fant mat.

b) Bestem sannsynligheten for at rotta går inn i rommet til høyre i det andre forsøket for hver av de to gruppene av rotter. Du kan anta at sannsynligheten for å gå til høyre er den samme for alle rommene unntatt enderommene. (Tips: Hvis du har regnet riktig, vil du få en femtegradsligning i $(1-p)/p$, hvor p er sannsynligheten for å gå til høyre. Du kan f. eks. løse denne iterativt.)

Bestem til slutt sannsynligheten for at en vilkårlig valgt rotte finner maten (i det andre forsøket). Hvis du ikke helt fikk til forrige spørsmål, kan du regne de to sannsynlighetene til å være 2/3 og 3/5. Du bør selv kunne avgjøre hvilken sannsynlighet som hører til hvilken gruppe.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal du undersøke et kø-system. Anta at kunder ankommer i henhold til en stasjonær Poisson-prosess med parameter λ. Dette kø-systemet har to behandlingsenheter, kalt A og B, som opererer uavhengig av hverandre. Det er en felles kø for systemet. Etter behandling i en av enhetene, forlater kunden systemet. Behandlingstidene for hver av enhetene antas å være uavhengige, eksponensialfordelte variabler med samme forventningsverdi. Denne er $1/\mu$ for begge systemene. Behandlingstidene antas å være uavhengige av ankomstprosessen. Hvis en kunde ankommer og finner systemet tomt, vil kunden gå til enhet A.

La $X(t)$ betegne antall kunder i systemet ved tidspunkt t.

a) Argumenter for at $X(t)$ blir en fødsels- og dødsprosesss, og bestem (de infinitesimale) fødsels- og dødsratene for prosessen.

b) Under bestemte forutsetninger på parameterne i systemet, vil det eksistere en grensefordeling for antall kunder i systemet. Bestem denne og forklar hvilke betingelser som må være oppfylt.

Kundene deles nå i to kategorier, A og B. A-kunder ankommer i henhold til en stasjonær Poisson-prosess med parameter λ_A. Det samme gjelder for B-kunder, men med parameter λ_B. De to Poisson-prosessene antas uavhengige. A-kunder behandles bare i A, som nå har en forventet behandlingstid lik $1/\mu_A$, mens B-kunder i utgangspunktet behandles i B. B har forventet behandlingstid lik $1/\mu_B$. Hvis dette hadde blitt strengt håndhevet, ville vi hatt to separate $M/M/1$-systemer, et A-system og et B-system. Imidlertid gjelder følgende regel: Ved tomt A-system, vil en ny kunde som ankommer, enten det er en A-kunde eller en B-kunde, bli behandlet i A. Hvis det er en kunde under behandling i A, vil A-kunder som ankommer stille seg i kø i A-systemet, mens B-kunder stiller seg i kø i B-systemet. Merk at B-kunder som allerede står i kø, ikke kan behandles i A.

La $X_A(t)$ betegne antall kunder i A-systemet ved tidspunkt t.

c) Sett opp balanseligningene for A-systemet for å bestemme grensefordelingen for $X_A(t)$.

d) Diskutér kort kravet som må være oppfylt for at grensefordelingen for $X_A(t)$ skal eksistere. Bestem grensefordelingen og vis at andelen av tiden A-systemet er tomt, er gitt som $\frac{\mu_A - \lambda_A}{\mu_A + \lambda_B}$.

e) Beregn det forventede antall kunder i A-systemet, betegnet med L_A. Vis at når $\lambda_A \to 0$, så vil $L_A \to \frac{\lambda_B}{\mu_A + \lambda_B}$. Vis også at når $\lambda_B \to 0$, så vil $L_A \to \frac{\lambda_A}{\mu_A - \lambda_A}$. Hva tilsvarer dette siste tilfellet?

Formelsamling:

Setningene om total sannsynlighet og dobbelforventning

La $B_1, B_2, \ldots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$
$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For en irredusibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ og er gitt av ligningene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i, s_{ij},

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å returnere til tilstand j gitt start i tilstand i, f_{ij},

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n-te hendelse (n-te arrival time), S_n, har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \ldots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs forover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorovs bakover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Hvis $P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ eksisterer, er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Kø-teori

For gjennomsnittlig antall kunder i systemet, L, gjennomsnittlig tid pr. kunde i systemet, W, betjeningstid, S, og gjennomsnittlig gjenværende arbeid i systemet, V, gjelder

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_q = \lambda_a W_q.$$

$$V = \lambda_a E[S W_q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$