Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland
Telefon: 73 59 35 20

EKSAMEN I EMNE SIF5072 STOKASTISK MODELLERING

Tirsdag 8. august 2000
Kl. 09.00-14.00

Hjelpemidler:
Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.
Karl Rottmann: Matematisk formelsamling.
Statistiske tabeller og formler, TAPIR
Ett gult ark (A5 med stempel) med egne formler og notater.

Sensur: 1. september 2000

Oppgave 1 PC-SALG

I en dataforretning etterspørres hver virkedag en spesiell type PC'er i følgende antall: ingen med sannsynlighet 0.3; en med sannsynlighet 0.6; og to med sannsynlighet 0.1. Etterspørselen er uavhengig av hva som er etterspurt tidligere dager. Dersom ikke behovet kan dekkes går kunden tapt.

Hvis det etter dagens salg er en eller færre PC'er på lager så bestilles 3 nye PC'er fra leverandøren. Disse leveres lageret før åpningstid virkedagen etter.

La X_t; $t = 0, 1, ...$ være lagerbeholdningen etter salg på virkedag t. Anta videre at $X_0 = 3$.

a) Begrunn hvorfor lagerbeholdningen av PC'er kan modelleres som en Markovkjede.

Spesifiser utfallsrom og overgangsmatrise.

b) Beregn forventet tid til første gang lageret er tomt. [Etabler notasjon og skriv opp likningssystemet som må løses. Selve løsningen kreves ikke.]

c) Etter at kjeden er kommet i likevekt, hva er sannsynlighetsfordelingen for antallet PC'er på lager. [Etabler notasjon og skriv opp likningssystemet som må løses. Selve løsningen kreves ikke.]

Leverandøren av PC'er rasjonaliserer og det medfører at sannsynligheten for at bestillingen leveres morgenen etter bare er 0.5. Ellers leveres bestillingen den påfølgende morgen, altså to virkedager etter bestilling. Forretningen har aldri mer enn en bestilling inne hos leverandøren.

d) Vis hvordan dette kan modelleres som en Markovkjede.

Spesifiser utfallsrom og overgangsmatrise.

Oppgave 2 SYKKELUTLEIE

En student planlegger langtidsutleie av sykler. Hun har n kunder som hver har en sykkel av samme type. Dersom en sykkel går i stykker taes den umiddelbart inn til reparasjon, og den leveres tilbake til kunden umiddelbart etter at den er reparert. Det er ingen begrensninger i reparasjonskapasiteten fordi medstudentene hjelper til.

Tiden fra en sykkel leveres til kunden, til den går i stykker, er eksponensielt fordelt med parameter $\lambda\,[\text{time}^{-1}]$. Reparasjonstiden for en sykkel er eksponensielt fordelt med parameter $\mu\,[\text{time}^{-1}]$. De to tidene er uavhengige. Alle syklene er i orden når de leveres kundene ved tid $t = 0$.

a) Begrunn kort at dette kan modelleres som en fødsels- og dødsprosess.

Spesifiser de tilhørende parametrene λ_i og μ_i ; $i = 0, 1, \ldots, n$ uttrykt ved λ og μ

b) Utled sannsynlighetsfordelingene for hvor mange sykler som ikke har gått i stykker for første gang innen et vilkårlig tidspunkt $t_0 > 0$.

c) En kunde får tilbake sykkelen sin etter første gangs reparasjon.
Utled et uttrykk for sannsynligheten for at sykkelen har vært lengre til reparasjon enn hos kunden i brukbar stand.

d) Anta at utleien foregår over lang tid slik at prosessen kan forutsettes å ha nådd likevekt. Bestem sannsynlighetsfordelingen for antall sykler som er ute hos kundene.

Oppgave 3 SIMULERING

Betrakt en univariat trunkert normalisert Gaussisk variabel på området $[-a, a]$ med $a > 0$. Benevn variablen V. Sannsynlighetstettheten er da:

$$f(v) = \begin{cases} \text{konstv} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}v^2\} & ; v \in [-a, a] \\ 0 & ; \text{ellers} \end{cases}$$

hvor konstv er en normeringskonstant.
Betrakt følgende algoritme:

Algoritme A:

Repeter:
trekk x fra normalisert Gaussisk dvs.

$$f(x) = \text{konstx} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}x^2\}; x \in [-\infty, \infty]$$

hvis $x \in [-a, a]$ sett: $v = x$ og stopp
ellers fortsett.

a) Demonstrer at dette er en forkastningsalgoritme ('rejection method') for å generere en realisasjon fra den trunkerte sannsynlighetsfordelingen $f(v)$.

Betrakt så en bivariat normert Gaussisk variabel med korrelasjon ρ. Benevn variablen (X, Y). Sannsynlighetstettheten er da:

$$f(x, y) = \text{konstxy} \cdot \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\} \quad ; x, y \in [-\infty, \infty]$$

hvor konstxy er en normeringskonstant.
En realisasjon av (X, Y) kan genereres ved hjelp av Hastings-Metropolis algoritmen.

Algoritmen er som følger:

Algoritme B:

Initier: Sett: $x_0 = 0, \; y_0 = 0$

Itererer $i = 1, 2, \ldots$

Trekk x^+ fra normalisert Gaussisk dvs.

$$f(x) = \text{konstx} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}x^2\};\ x \in [-\infty, \infty]$$

Trekk y^+ fra normalisert Gausisk dvs.

$$f(y) = \text{konsty} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}y^2\};\ y \in [-\infty, \infty]$$

Med sannsynlighet α : sett $x_i = x^+$, $y_i = y^+$
ellers sett $x_i = x_{i-1}$, $y_i = y_{i-1}$

b) Spesifiser et uttrykk for akseptsannsynligheten α som sikrer at (x_i, y_i) går mot en realisasjon av $f(x, y)$ når $i \to \infty$.

Formelsamling:

Setningen om total sannsynlighet og dobbelforventning:

La $B_1, B_2, \dots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C) P(B_i|C)$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C] P(B_i|C)$$

Forventning for ikke-negative stokastiske variable:

Hvis X er diskret fordelt med mulige verdier $0, 1, 2, \dots$ er

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt med $P(X \leq 0) = 0$ er

$$E[X] = \int_0^{\infty} P(X > x)\, dx.$$

Markovkjeder i diskret tid:

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i, s_{ij}

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å returnere til tilstand j gitt start i tilstand i, f_{ij}

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij}) / s_{jj}.$$

Poisson-prosess:

Ventetid til n-te hendelse (n-te arrival time), S_n, har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \ldots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markovkjeder i kontinuerlig tid:

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Kolmogorov's forover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorov's bakover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Grensefordeling i fødsels- og dødsprosesser:

Grensefordelingen i en fødsels- og dødsprosess med fødselsintensiteter $\lambda_k > 0$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ og dødsintensiteter $\mu_0 = 0$ og $\mu_k > 0$ for $k = 1, 2, \ldots$ er

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Kø-teori:

For gjennomsnitlig antall kunder i systemet, L, gjennomsnitlig tid i systemet, W, gjennomsnitlig antall kunder som betjenes, Z, betjeningstid, S, og arbeid i systemet, V, gjelder:

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_q = \lambda_a W_q.$$

$$Z = \lambda_a E[S].$$

$$V = \lambda_a E[SW_q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$

Noen matematiske rekker:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}; \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

Differensialligning:

Differensialligningen $f'(t) + \alpha f(t) = g(t)$ for $t \geq 0$ med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = ae^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s)\, ds$$