SIF 5072 STOKASTISK MODELLERING
75561 STOKASTISKE PROSESSER

Examen 8. august 2000

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

Ettersporsel: 0 med sanns. 0.3
1 med sanns 0.6
2 med sanns 0.1

Hvis 0 eller 1 på lager bestilles 3 – leveres neste morgen

X_t ; $t = 0, 1, 2, \ldots$ lagerbeholdning dag t $X_t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$X_0 = 3$

a)

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t & \text{hvis } X_t = 2,3,4 \quad \text{sanns } 0.3 \\ X_t + 3 & \text{hvis } X_t = 0,1 \quad \text{sanns } 0.3 \\ X_t - 1 & \text{hvis } X_t = 2,3,4 \quad \text{sanns } 0.6 \\ X_t + 3 - 1 & \text{hvis } X_t = 0,1 \quad \text{sanns } 0.6 \\ X_t - 2 & \text{hvis } X_t = 2,3,4 \quad \text{sanns } 0.1 \\ X_t + 3 - 2 & \text{hvis } X_t = 0,1 \quad \text{sanns } 0.1 \end{cases}$$

Ser at $\text{Prob}\{X_{t+1} = j \mid X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_0 = 3\}$

$= \text{Prob}\{X_{t+1} = j \mid X_t = i_t\}$ – dvs. Markov kjede

	0	1	2	3	4
0	0	0.1	0.6	0.3	0
1	0	0	0.1	0.6	0.3
2	0.1	0.6	0.3	0	0
3	0	0.1	0.6	0.3	0
4	0	0	0.1	0.6	0.3

b) $T = \min_t \{ t \geq 0 \mid X_t = 0 \}$

$E\{T \mid X_0 = i\} = \nu_i \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4$

$$
\begin{array}{llccccc}
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\nu_0 = 0 & & & & & & \\
\nu_1 = 1 + & & & & 0.1\nu_2 & +\,0.6\nu_3 & +\,0.3\nu_4 \\
\nu_2 = 1 + & & 0.1\nu_0 & +\,0.6\nu_1 & +\,0.3\nu_2 & & \\
\nu_3 = 1 + & & & 0.1\nu_1 & +\,0.6\nu_2 & +\,0.3\nu_3 & \\
\nu_4 = 1 + & & & & 0.1\nu_2 & +\,0.6\nu_3 & +\,0.3\nu_4
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$\nu_0 = 0$

$\nu_1 = \nu_4$

$0.7\nu_2 = 1 + 0.6\nu_1 \quad \rightarrow \quad 7\nu_2 = 10 + 6\nu_1$

$0.7\nu_3 = 1 + 0.1\nu_1 + 0.6\nu_2 \quad \rightarrow \quad 7\nu_3 = 10 + \nu_1 + 6\nu_2$

$0.7\nu_4 = 1 + 0.1\nu_2 + 0.6\nu_3 \quad \rightarrow \quad 7\nu_4 = 10 + \nu_2 + 6\nu_3$

$$\Downarrow$$

$\nu_0 = 0$

$\nu_4 = \nu_1$

$7\nu_1 = 10 + \nu_2 + 6\nu_3$

$7\nu_2 = 10 + 6\nu_1$

$7\nu_3 = 10 + \nu_1 + 6\nu_2$

Svaret er $E\{T \mid X_0 = 3\} = \nu_3$

Oppgave 2

Hver sykkel er uavhengig av hverandre med feilrate λ [time^{-1}] og reparasjonsrate μ[time^{-1}]. Det er n sykler.

La $X(t)$ - antall sykler til reparasjon ved tid t.

$X(0) = 0$

a)
$$\text{Prob}\{X(t+h)=j \mid X(t)=i\} = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & ; j = i+1 \\ \mu_i h + o(h) & ; j = i-1 \\ 1-(\lambda_i+\mu_i)h + o(h) & ; j = i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor
$$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= (n-i)\lambda \\ \mu_i &= i\mu \end{aligned}\right\} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Dette definerer en fødsels- og dødsprosess

b) For hver sykkel:

T - tidspkt for første feil: $T \sim \exp\{\lambda\}$; $T \geq 0$

dvs

Prob{sykkel ikke istykker første gang ved t_0}

$= \text{Prob}\{T > t_0\} = 1 - \text{Prob}\{T \leq t_0\}$

$= 1 - F_T(t_0) = 1 - [1 - e^{-\lambda t_0}] = e^{-\lambda t_0}$

Syklene går istykker uavh. av hverandre:

$N(t)$ - antall sykler ikke gått i stykker ved

$$\text{Prob}\{N(t_0) = i\} = \binom{n}{i}\left[e^{-\lambda t_0}\right]^i \left[1 - e^{-\lambda t_0}\right]^{n-i}$$

$$= \binom{n}{i} e^{-i\lambda t_0}\left[1 - e^{-\lambda t_0}\right]^{n-i}$$

c) $\pi_i = \lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{Prob}\{X_t = i\}$; $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$$
\begin{array}{lllllll}
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\pi_0 & = & & & 0.1\pi_2 & & \\
\pi_1 & = & 0.1\pi_0 & + & 0.6\pi_2 & +0.1\pi_3 & \\
\pi_2 & = & 0.6\pi_0 & +0.1\pi_1 & +0.3\pi_2 & +0.6\pi_3 & +0.1\pi_4 \\
\pi_3 & = & 0.3\pi_0 & +0.6\pi_1 & + & +0.3\pi_3 & +0.6\pi_4 \\
\pi_4 & = & & +0.3\pi_1 & & & +0.3\pi_4
\end{array}
$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$$

d) Må innføre to hjelpeklasser:

0^+ - null på lager ved dagens slutt og en bestilling inne fra dagen før

1^+ - en på lager ved dagens slutt og en bestilling inne fra dagen før

	0^+	1^+	0	1	2	3	4
0^+				0.1	0.6	0.3	
1^+					0.1	0.6	0.3
0	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}\cdot 0.1$	$\frac{1}{2}0.6$	$\frac{1}{2}\cdot 0.3$	
1	$\frac{1}{2}\cdot 0.7$	$\frac{1}{2}\cdot 0.3$			$\frac{1}{2}\cdot 0.1$	$\frac{1}{2}\cdot 0.6$	$\frac{1}{2}\cdot 0.3$
2			0.1	0.6	0.3		
3				0.1	0.6	0.3	
4					0.1	0.6	0.3

c) T – tid til første feil : $T \sim \exp\{\lambda\}$
U – reparasjonstid : $U \sim \exp\{\mu\}$

Prob{lengre til reparasjon enn hos kunden}

$$= \text{Prob}\{U > T\}$$

$$= \int_0^\infty \text{Prob}\{U > T / T = t\} f_T(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty [1 - F_U(t)] f_T(t)\,dt$$

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$F_U(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

$$\text{Prob}\{U > T\} = \int_0^\infty e^{-\mu t} \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(\mu+\lambda)t}\,dt$$

$$= \frac{-\lambda}{\mu+\lambda} \Big/_0^\infty e^{-(\mu+\lambda)t}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\lambda}{\mu+\lambda}}}$$

d) $p_i = \lim_{t \to \infty} \text{Prob}\{X(t) = i\}$ $\quad i = 0, 1, \dots, n$

$p_i = \theta_i p_0 \Rightarrow p_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \theta_i\right]^{-1}$

$\theta_0 = 1$

$\theta_i = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} = \frac{n\lambda \cdot (n-1)\lambda \cdots (n-i+1)\lambda}{\mu\, 2\mu \cdots i\mu} = \binom{n}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$

$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right]^{-1} = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu}\right]^{-n} = \left[\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right]^n$

$p_i = \left[\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right]^n \binom{n}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$

Prob{ k antall sykler hos kundene }

= Prob{ (n−k) antall sykler til reparasjon }

$= p_{n-k} = \left[\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right]^n \binom{n}{n-k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-k}$

$= \left[\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right]^n \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-k}$

Oppgave 3

a) Bestem M slik at

$$f_{\ddot{U}}(u) \leq M \cdot f_X(u) \quad \text{for alle } u$$

dvs at en mulinnet er

$M = \text{konst}\ddot{U} / \text{konst}X$

Forkastningssampling er da:

~~trekk~~ x fra $f_X(x)$

aksepter x med sannsynlighet $\alpha_x = \dfrac{f_{\ddot{U}}(x)}{M \cdot f_X(x)}$

Merk at

$$\alpha_x = \frac{f_{\ddot{U}}(x)}{M \cdot f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{\exp\{-\frac{1}{2}x^2\}}{\exp\{-\frac{1}{2}x^2\}} = 1 & ; x \in [-a, a] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

dvs

x blir akseptert med sannsynlighet 1 når $x \in [-a, a]$, og forkastet ellers. QED.

b) Akseptsannsynligheten i Hasting-Metropolis algoritmen er:

$$\alpha = \min\left\{ \frac{f(x^+, y^+)}{f(x_i, y_i)} \cdot \frac{f(x_i)\cdot f(y_i)}{f(x^+)\, f(y^+)} , 1 \right\}$$

$$= \min\left\{ \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\rho^2 (x^{+2} - x_i^2) - 2\rho (x^+ y^+ - x_i y_i) + \rho^2 (y^{+2} - y_i^2) \right] \right.\right.$$

Dette vil sikre at algoritmen konvergerer mot en realisasjon fra $f(x, y)$. QED.