



Faglig kontakt under eksamen:
Bo Lindqvist 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG SIF5072 STOKASTISKE PROSESSER

Mandag 13. august 2001

Tid: 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler:

Tabeller og formler i statistikk (TAPIR).

Statistiske tabeller og formler (TAPIR).

Karl Rottmann: Matematisk formelsamling.

Typegodkjent kalkulator med tomt minne.

Et gult ark (A5 med stempel fra instituttet) med egne formler og notater.

Sensur: 1. september 2001

Oppgave 1 EHRENFEST-MODELLEN

Den såkalte Ehrenfest-modellen kan bl.a. brukes som modell for varmeovergang mellom to isolerte legemer av ulik temperatur. Legemenes temperaturer representeres da ved antall kuler i to urner, som antas å inneholde tilsammen M kuler. Kulene antas å være nummerert $1, 2, \dots, M$, der M er et endelig positivt heltall. Varmeovergangen mellom legemene modelleres ved at det hver tidsenhet trekkes tilfeldig ett av tallene $1, 2, \dots, M$ og at kula med dette nummer flyttes fra urnen der den befinner seg, til den andre urnen. De enkelte trekninger av tallene $1, 2, \dots, M$ antas stokastisk uavhengige. Betrakt nå en bestemt av urnene. La X_0 betegne antall kuler i denne urnen opprinnelig, og la X_n betegne antall kuler i urnen etter n trekninger.

- a) Gjør rede for at $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ er en Markov-kjede med tilstandsrom $\{0, 1, \dots, M\}$ og med ett-steps overgangssannsynligheter

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{M} & \text{for } j = i - 1 \\ 1 - \frac{i}{M} & \text{for } j = i + 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

for alle $i, j \in \{0, 1, \dots, M\}$.

b) Hva vil det si at en Markov-kjede er irreducibel? Er Markov-kjeden $\{X_n\}$ i denne oppgaven irreducibel? Er den aperiodisk? Begrunn svarene.

c) Finn P_{0j}^3 for alle $j \in \{0, 1, \dots, M\}$.

d) Vis ved regning at

$$(1) \quad \binom{M}{i} P_{i,i+1} = \binom{M}{i+1} P_{i+1,i}$$

for $i \in \{0, 1, \dots, M-1\}$

Gjør kort rede for hva det vil si at en Markov-kjede $\{X_n\}$ er tids-reversibel. Forklar hvorfor vi fra likheten (1) kan konkludere at $\{X_n\}$ i denne oppgaven er tids-reversibel.

e) Finn stasjonærfordelingen $\{\pi_i\}$ for Markov-kjeden $\{X_n\}$.

Hvilken kjent fordeling er dette? Kan resultatet gis en intuitiv forklaring?

Du kan bruke at $\sum_{i=0}^M \binom{M}{i} = 2^M$.

f) Man ønsker et uttrykk for forventet antall kuler i urnen etter n treknninger, gitt at det opprinnelige antallet er i , dvs.

$$m_i^n = E(X_n | X_0 = i)$$

Bevis formelen

$$m_i^n = \frac{M}{2} + \left(1 - \frac{2}{M}\right)^n \left(i - \frac{M}{2}\right)$$

($i = 0, 1, \dots, M$; $n = 0, 1, 2, \dots$).

Vink: Utled først rekursjonsformelen

$$m_i^{n+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{M}\right) m_i^n$$

Oppgave 2 SIMULERING

La Y være eksponensialfordelt med forventning 1, dvs. at Y har tetthet

$$g(x) = e^{-x}, \quad x > 0$$

- a) Vis hvordan Y kan simuleres ved inversjonsmetoden (“The Inverse Transformation Method”).

La Z være en positiv stokastisk variabel med tetthet

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x > 0$$

- b) Vis hvordan Z kan simuleres ved forkastningsmetoden (“Rejection Method”) ved først å simulere Y som i punkt (a).
- c) La X være standard normalfordelt, dvs. har forventning 0 og varians 1.

Vis at $|X|$ har tetthet $f(x)$ gitt ovenfor.

Forklar hvordan du kan utvide simuleringsmetoden i punkt (b) til å simulere verdier for X .

Oppgave 3 BROWNSK BEVEGELSE

La $\{B(t), t \geq 0\}$ være en standard Brownsk bevegelse (“Brownian motion”), dvs. at $\sigma = 1$.

- a) Gitt at $B(2) = 3$, hva er sannsynligheten for at $B(1) \leq 1$?

Formelsamling:

Setningen om total sannsynlighet og dobbelforventning:

La $B_1, B_2, \dots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C)$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C)$$

Forventning for ikke-negative stokastiske variable:

Hvis X er diskret fordelt med mulige verdier $0, 1, 2, \dots$ er

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt med $P(X \leq 0) = 0$ er

$$E[X] = \int_0^{\infty} P(X > x) dx.$$

Markovkjeder i diskret tid:

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i , s_{ij}

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å returnere til tilstand j gitt start i tilstand i , f_{ij}

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poisson-prosess:

Ventetid til n -te hendelse (n -te arrival time), S_n , har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \dots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1, S_2, \dots, S_n | N(t)}(s_1, s_2, \dots, s_n | n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

Markovkjeder i kontinuertlig tid:

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Kolmogorov's forover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorov's bakover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Grensefordeling i fødsels- og dødsprosesser:

Grensefordelingen i en fødsels- og dødsprosess med fødselsintensiteter $\lambda_k > 0$ for $k = 0, 1, 2, \dots$ og dødsintensiteter $\mu_0 = 0$ og $\mu_k > 0$ for $k = 1, 2, \dots$ er

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_k} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

Kø-teori:

For gjennomsnittlig antall kunder i systemet, L , gjennomsnittlig tid i systemet, W , gjennomsnittlig antall kunder som betjenes, Z , betjeningstid, S , og arbeid i systemet, V , gjelder:

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_q = \lambda_a W_q.$$

$$Z = \lambda_a E[S].$$

$$V = \lambda_a E[SW_q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$

Noen matematiske rekker:

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1 - a)^2}; \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

Differensialligning:

Differensialligningen $f'(t) + \alpha f(t) = g(t)$ for $t \geq 0$ med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = a e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) ds$$