Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

SIF5072 Stokastiske prosesser
Våren 2002

Løsningsforslag - Øving Eksamen august 01

Oppgave 1

a) $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ er en markovkjede hvis sannsynlighetsfordelingen til X_n kun er avhengig av tilstanden i forrige tidsledd. Dette er tilfredstillt i vårt tilfelle, da X_{n+1} bare kan være en større eller en midre enn X_n. Sannsynligheten for hver av de to mulighetene avhenger kun av X_n. Sannsynligheten for å gå en opp er lik sannsynligheten for å velge en kule i den andre urnen. Med $(M - i)$ kuler i den andre urnen blir sannsynligheten for dette utfallet $\frac{M-i}{M} = 1 - \frac{i}{M}$. Sannsynligheten for å gå en ned er lik sannsynligheten for å velge en kule i den første urnen. Med i kuler i denne urnen, blir sannsynligheten $\frac{i}{M}$. Dermed er uttrykket for overgangssannsynlighetnen vist.

b) En markovkjede er irredusibel hvis alle tilstander kommuniserer med hverandre. Dvs at fra en vilkårlig tilstand så er det positiv sannsynlighet for at kjeden besøker samtlige andre tilstander, bare antall overganger blir stort nok. I vårt tilfelle komuniserer tilstand 0 med tilstand 1, og tilstand 1 kommuniserer med tilstand 2. Dermed kommuniserer tilstand 0 med tilstand 2. Slik kan vi argumentere til alle tilstander kommuniserer. Kjeden er ikke aperiodisk fordi $P_{ii}^n = 0$ når n ikke er delbar på 2, dvs at den har periode 2 og ikke 1 som er kravet for aperiodisitet. Vi ser at $P_{ii} = 0$ fra overgangssannsynlighetene. Vis ser også at $P_{ii}^3 = 0$ siden $P_{(i+1)(i+1)} = P_{(i-1)(i-1)} = 0$. Vi ser at man kan bare komme tilbake til opprinnelig tilstand ved like antall overganger.

c) Vi kan her bruke Chapman-Kolmogorov ligningene som er gitt i den medfølgende formelsamlinga.

$$P_{0j}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{0k}^m P_{kj}^n$$

Vi vet at $P_{00}^1 = 0$ og $P_{00}^3 = 0$ mens $P_{01}^1 = 1$ og $P_{01}^2 = 0$. Vi kan også se at $P_{02}^3 = 0$ og at $P_{0i} = 0, i = 4, 5, \ldots$. Vi trenger derfor bare å regne ut P_{01}^3 og P_{03}^3 La oss se på Chapman-Kolmogorov ligningen for P_{01}^3:

$$\begin{aligned} P_{01}^{1+2} &= P_{00}^1 P_{01}^2 + P_{01}^1 P_{11}^2 + P_{02}^1 P_{21}^2 + \ldots \\ &= 0 \cdot P_{01}^2 + 1 \cdot P_{11}^2 + 0 + 0 + \ldots = P_{11}^2 \end{aligned}$$

Bruker igjen Chapman-Kolmogorov på P_{11}^2 og får

$$\begin{aligned} P_{11}^2 &= P_{10}P_{01} + P_{11}P_{11} + P_{12}P_{21} \\ &= P10 + P_{12}P_{21} \\ &= \frac{1}{M} + (1 - \frac{1}{M})\frac{2}{M} \end{aligned}$$

Dvs

$$P_{01}^3 = \frac{3M - 2}{M^2}$$

P_{03}^3 er enklere å regne ut, da vi i dette tilfelle må gå rett fra 0 til 3.

$$P_{03}^3 = P_{01}P_{12}P_{23} = 1 \cdot (1 - \frac{1}{M}) \cdot (1 - \frac{2}{M}) = \frac{(M-1)(M-2)}{M^2}$$

d) Venstre side:

$$\begin{aligned} \binom{M}{i} P_{i,i+1} &= \tfrac{M!}{i!(M-i)!} \cdot (1 - i/M) = \\ &= \tfrac{M!}{i!(M-i)!} \cdot \tfrac{M-i}{M} = \tfrac{(M-1)!}{i!(M-i-1)!} \end{aligned}$$

Høyre side:

$$\binom{M}{i+1} P_{i+1,i} = \frac{M!}{(i+1)!(M-i-1)!} \cdot \frac{i}{M} = \frac{(M-1)!}{i!(M-i-1)!}$$

Vi ser at de to sidene er like. For at en markovkjede skal være tidsreversibel, må likheten

$$\pi_i P_{i\,j} = \pi_j P_{j\,i} \text{ for alle } i, j$$

gjelde. La $(x_0, x_1, \ldots, x_M)$ være positive slik at

$$\pi_i = \frac{x_i}{\sum_{k=0}^M x_k} \text{ for alle } i$$

Da vil kravet om reversibilitet bli redusert til

$$\begin{gathered} \pi_i P_{i\,j} = \pi_j P_{j\,i} \text{ for alle } i, j \\ \Updownarrow \\ \frac{x_i}{\sum_{k=0}^M x_k} P_{i\,j} = \frac{x_j}{\sum_{k=0}^M x_k} P_{j\,i} \\ \Updownarrow \\ x_i P_{i\,j} = x_j P_{j\,i} \text{ for alle } i, j \end{gathered}$$

I vårt tilfelle er det nok at

$$x_i P_{i,i+1} = x_{i+1} P_{i+1,i} \text{ for alle } i \tag{1}$$

siden $P_{ij} = 0$ ellers. Vi ser at $x_i = \binom{M}{i}$ oppfyller ligning (1).

e) P.g.a. tidsreversibilitet må vi ha

$$\pi_i = \frac{x_i}{\sum_{k=0}^{M} x_k} = \frac{\binom{M}{i}}{\sum_{k=0}^{M} \binom{M}{k}} = \binom{M}{i} 2^{-M}$$

dvs binomisk$(M, 1/2)$ fordeling. Intuitiv tolkning: Etter et stort antall trekninger vil hver kule med sannsynlighet $1/2$ være i en av de to urnene, uavhengig av hverandre.

f) Iflg. vink ser vi først på

$$\begin{aligned}
m_i^{n+1} &= E(X_{n+1} | X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{M} E(X_{n+1} | X_0 = i, X_n = j) P(X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{M} E(X_{n+1} | X_n = j) P(X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{M} [(j-1)\frac{j}{M} + (j+1)(1 - \frac{j}{M})] P_{ij}^n \\
&= \sum_{j=0}^{M} [1 + (1 - \frac{2}{M}) j] P_{ij}^n \\
&= 1 + (1 - \frac{2}{M}) E(X_n | X_0 = i) \\
&= 1 + (1 - \frac{2}{M}) m_i^n
\end{aligned}$$

Løser ved hjelp av rekursjon. For $n = 0$:

$$m_i^0 = \frac{M}{2} + (1 - \frac{2}{M})^0 (i - \frac{M}{2}) = \frac{M}{2} + (i - \frac{M}{2}) = i, \tag{2}$$

som stemmer med det vi forventer. Antar nå at formelen gjelder for n. Skal vise at den også gjelder for $n + 1$.

$$\begin{aligned}
m_i^{n+1} &= 1 + (1 - \frac{2}{M}) m_i^n \\
&= 1 + (1 - \frac{2}{M}) \frac{M}{2} + (1 - \frac{2}{M})^n (i - \frac{M}{2}) \\
&= 1 + (\frac{M}{2} - 1) + (1 - \frac{2}{M})^{n+1} (i - \frac{M}{2}) \\
&= \frac{M}{2} + (1 - \frac{2}{M})^{n+1} (i - \frac{M}{2})
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Vet at den kumulative fordelingen til eksponentialfordelingen er gitt ved

$$F(x) = 1 - e^x,\ x > 0$$

Den inverse av denne er gitt ved

$$F(x) = 1 - e^x \Leftrightarrow F^{-1}(u) = \log(1-u)$$

slik at Y kan simuleres ved å trekke $U \sim Unif[0,1]$ og så sette $Y = F^{-1}(U) = \log(1-U)$.

b) Vi ser at

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2+x}$$

For å finne en konstant som alltid er større enn $f(x)/g(x)$ må vi finne den største verdien $e^{-x^2/2+x}$ kan ha for $x > 0$. Dette gjør vi ved derivasjon, og vi deriverer bare eksponenten da eksponentialfunksjonen er en monoton funskjon.

$$(-x^2/2 + x)' = -x + 1 \Rightarrow x_{max} = 1$$

Vi får dermed at

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{1/2}$$

Dermed blir simuleringsalgoritmen seende slik ut:

1. Trekk $X \sim g(x)$ ved hjelp av algoritmen over og trekk $U \sim Unif[0,1]$
2. Hvis $U \leq \frac{f(Y)\,\sqrt{2\pi}}{2\,e^{1/2}\,g(Y)}$ så settes $Z = Y$. Ellers begynn igjen på 1.

c) La

$$X \sim h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

og la $W = |X|$. Da er

$$\begin{aligned} F_W(w) = P(W \leq w) = P(|X| \leq w) &= P(-w \leq X \leq w) \\ &= \Phi(w) - \Phi(-w) = 2\Phi(w) - 1 \end{aligned}$$

Dermed blir

$$f_W(w) = F_W'(w) = 2\,h(w) = f(w) \ \ Q.E.D.$$

Vi kan simulere X ved å simulere Z og $U \sim Unif[0.1]$ og sette

$$X = \begin{cases} Z, \text{hvis } U \leq 1/2 \\ -Z, \text{hvis } U > 1/2 \end{cases}$$

Oppgave 3

a) Skal finne $P(B(1) \leq 1|B(2) = 3)$. La $f_{1|2}(x|3)$ være sannsynlighetsfordelingen til $X(1)$ når vi vet at $X(2) = 3$. Ved hjelp av bayes teorem kan denne skrives som

$$\begin{aligned} f_{1|2}(x|3) &= \frac{f_1(x)f_{2|1}(3|x)}{f_2(3)} = \frac{f_1(x)f_{2-1}(3-x)}{f_2(3)} \\ &\propto \exp\{-x^2/2 - (3-x)^2/2(2-1)\} \\ &= \exp\{-x^2 + 3x - 9/2\} \\ &\propto \exp\{-x^2 + 3x - (3/2)^2\} \\ &= \exp\{-(x - 3/2)^2\} \end{aligned}$$

For å få til overgangene over, så ganger og deler vi med konstante tall. Det er derfor vi må bruke proporsjonalitetstegnet i stedet for likhetstegn. Av den siste ligningen ser vi at $f_{1|2}(x|3)$ er normalfordelt med forventning $3/2$ og varians $1/2$. Dermed er

$$P(B(1) \leq 1|B(2) = 3) = \Phi\left(\frac{1 - 3/2}{\sqrt{1/2}}\right) = \Phi(-0.71) = \underline{\underline{0.24}}$$