



Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:

Håkon Tjelmeland 73 59 35 38/73 94 27 25

EKSAMEN I EMNE SIF5072 STOKASTISKE PROSESSER

Lørdag 16. august 2003

Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S

Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.

K. Rottman: Matematisk formelsamling.

Ett gult ark (A5 med stempel) med egne formler og notater.

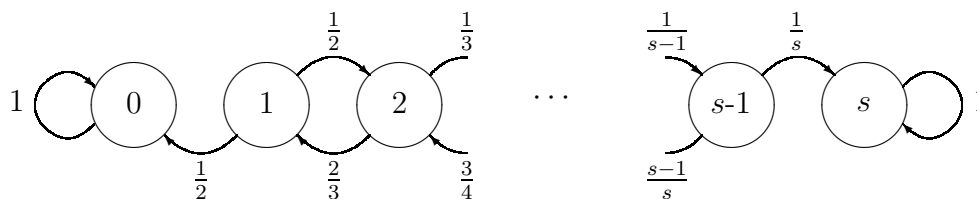
Sensur er ferdig: 6. september 2003.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi regne på en variant av spillerens ruin. La $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ være en diskret-tid markovkjede med utfallsrom $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, s\}$ og med overgangssannsynligheter

$$P_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} \frac{1}{i+1} & \text{hvis } j = i + 1 \text{ og } i = 1, 2, \dots, s-1, \\ \frac{i}{i+1} & \text{hvis } j = i - 1 \text{ og } i = 1, 2, \dots, s-1, \\ 1 & \text{hvis } i = j = 0 \text{ eller } i = j = s, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

I motsetning til den vanlige spillerens ruin som dere kjenner fra læreboka, kan vi merke oss at i denne oppgaven er sannsynlighetene for å “vinne” eller “tape” et enkeltspill avhengig av hvilken tilstand markovkjeden befinner seg i. Markovkjeden kan også illustreres ved skjemaet øverst på neste side.



- a) Bestem følgende sannsynligheter (når $s \geq 6$)

$$P\{X_3 = 0 | X_0 = 1\} \quad , \quad P\{X_5 = 0 | X_0 = 1\} \quad \text{og} \quad P\{X_3 = 0 | X_0 = 1, X_5 = 0\}$$

- b) Bestem markovkjedens ekvivalensklasser, bestem for hver tilstand perioden og om den er transient eller rekurrent. Har markovkjeden en entydig grensefordeling? (Alle svarene må begrunnes!)

La T betegne tiden da markovkjeden for første gang kommer til tilstand 0 eller tilstand s , dvs. $T = \min\{n : X_n = 0 \text{ eller } X_n = s\}$. La videre u_i^s betegne sannsynligheten for at markovkjeden ender opp i tilstand s gitt at den starter i tilstand i , dvs. $u_i^s = P\{X_T = s | X_0 = i\}$.

- c) Bestem et lineært ligningssystem for $u_i^s; i = 0, 1, \dots, s$.

Vis at u_i^s kan skrives på formen

$$u_i^s = \frac{a_i}{a_s},$$

der $a_0 = 0$ og $a_1 = 1$, og bestem en rekursjonsformel for a_i for $i \geq 2$.

Vis spesielt at

$$u_3^5 = \frac{2}{17} \quad \text{og} \quad u_4^7 = \frac{5}{437}.$$

I det siste punktet i denne oppgaven skal vi betrakte en litt modifisert utgave av markovkjeden over. Anta at tilstand 0 ikke lenger er absorberende, men at

$$P_{00} = 0 \quad \text{og} \quad P_{01} = 1.$$

De øvrige overgangssannsynlighetene er uforandret. La v_i^s betegne forventet antall besøk i tilstand 0 gitt at $X_0 = i$.

- d) Finn v_i^s . Du kan benytte $a_i; i = 0, 1, \dots, s$ fra punkt c) til å uttrykke svaret.

Oppgave 2

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet $f(x)$ og tilhørende kumulativ fordelingsfunksjon $F(x) = P\{X \leq x\}$. Som kjent benytter invers-transformasjonsmetoden følgende algoritme for å generere en realisasjon av X :

- Trekk U fra en uniformfordeling på intervallet $[0, 1]$.
- La $X = F^{-1}(U)$.

Her betegner $F^{-1}(\cdot)$ den inverse funksjonen til $F(\cdot)$.

- a) Vis at invers-transformasjonsmetoden er korrekt, dvs. vis at $X = F^{-1}(U)$ virkelig har kumulativ fordelingsfunksjon $F(x)$.

Gi en algoritme for å generere en eksponensialfordelt variabel med parameter λ ved invers-transformasjonsmetoden.

Anta så at vi ønsker å generere n stokastiske variable med simultan sannsynlighetstetthet

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda^n} e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} & \text{hvis } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der k er en normaliseringskonstant. Merk at denne sannsynlighetsfordelingen fremkommer ved å legge bibetingelsen $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$ på n uavhengige eksponensialfordelte variable.

- b) Gi en algoritme for å generere realisasjoner av $X_1, X_2, \dots, X_n$ ved hjelp av forkastningsmetoden (rejection sampling). Angi spesielt formel for forslagsfordelingen du vil benytte og formel for tilhørende akseptanssannsynlighet.

Angi et problem med forkastningsmetoden i dette tilfellet dersom n er stor.

Oppgave 3

En maskin består av to komponenter, komponent 1 og komponent 2. For at maskinen skal funksjonere må begge komponentene funksjonere. Når maskinen funksjonerer vil komponent 1 og 2 feile uavhengig av hverandre. I et tidsintervall av lengde h vil komponent 1 feile med sannsynlighet $\lambda_1 h + o(h)$ og komponent 2 vil tilsvarende feile med sannsynlighet $\lambda_2 h + o(h)$. Når en av komponentene har feilet vil man umiddelbart påbegynne reparasjon. En komponent som er under reparasjon vil bli ferdigreparert i et tidsintervall av lengde h med sannsynlighet $\mu h + o(h)$. Intensiteten for at maskinen blir ferdigreparert er altså ikke avhengig av hvilken

komponent som er under reparasjon. Merk også at en komponent (som ikke har feilet) ikke kan feile mens den andre komponenten er under reparasjon.

La $X(t) \in \{0, 1, 2\}$ betegne maskinens tilstand ved tid t , der

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{hvis maskinen funksjonerer ved tid } t, \\ 1 & \text{hvis komponent 1 er under reparasjon ved tid } t, \\ 2 & \text{hvis komponent 2 er under reparasjon ved tid } t. \end{cases}$$

Med antagelsene gitt over blir dermed $X(t)$ en markovprosess.

Merk: I denne oppgaven skal alle svarene gis som funksjon av (en eller flere av) μ , λ_1 og λ_2 .

a) Tegn et skjema over prosessen $X(t)$.

Gitt at maskinen funksjonerer ved tid 0, hva er sannsynligheten for at den vil funksjonere hele tiden frem til tid t ?

Gitt at maskinen funksjonerer ved tid 0, hva er sannsynligheten for komponent 1 er den første komponenten som feiler?

b) Bestem grensefordelingen til $X(t)$.

I det lange løp, hvor stor andel av tiden vil maskinen være under reparasjon?

I det lange løp, hvor mange ganger vil maskinen feile pr. tidsenhet?

La $P_i(t)$ betegne sannsynligheten for at maskinen er i tilstand i ved tid t gitt at den funksjonerte ved tid 0, dvs. $P_i(t) = P\{X(t) = i | X(0) = 0\}$.

c) Skriv opp et sett med differensialligninger for $P_i(t)$ for $i = 0, 1, 2$. Bestem også tilhørende initialbetingelser.

d) Bestem konstanter $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^2$ og γ slik at

$$P_i(t) = \alpha_i + \beta_i e^{-\gamma t} \quad \text{for } i = 0, 1, 2.$$

Benytt dette til å verifisere grensefordelingen du fant i punkt **b**).

Formelsamling:

Setningene om total sannsynlighet og dobbelforventning

La $B_1, B_2, \dots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For en irreduksibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$ og er gitt av ligningene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i , s_{ij} ,

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å returnere til tilstand j gitt start i tilstand i , f_{ij} ,

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n -te hendelse (n -te arrival time), S_n , har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \dots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1, S_2, \dots, S_n | N(t)}(s_1, s_2, \dots, s_n | n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs forover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorovs bakover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Hvis $P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ eksisterer, er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \dots$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \dots$$

Kø-teori

For gjennomsnittlig antall kunder i systemet, L , gjennomsnittlig tid pr. kunde i systemet, W , betjenings-tid, S , og gjennomsnittlig gjenværende arbeid i systemet, V , gjelder

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_q = \lambda_a W_q.$$

$$V = \lambda_a E[SW_q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$