



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

SIF5072 Stokastiske
prosesser

Løsningsforslag - Eksamen august 2003

Oppgave 1

a)

Fra skjemaet over markovkjeden får man

$$P\{X_3 = 0 | X_0 = 1\} = P_{10}P_{00}^2 + P_{12}P_{21}P_{10} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}},$$

og

$$\begin{aligned} P\{X_5 = 0 | X_0 = 1\} &= P_{10}P_{00}^4 + P_{12}P_{21}P_{10}P_{00}^2 + P_{12}P_{21}P_{12}P_{21}P_{10} + P_{12}P_{23}P_{32}P_{21}P_{10} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} = \underline{\underline{\frac{55}{72}}}. \end{aligned}$$

Dermed får man videre

$$\begin{aligned} P\{X_3 = 0 | X_0 = 1, X_5 = 0\} &= \frac{P\{X_3 = 0, X_5 = 0 | X_0 = 1\}}{P\{X_5 = 0 | X_0 = 1\}} \\ &= \frac{P\{X_3 = 0 | X_0 = 1\}P\{X_5 = 0 | X_3 = 0, X_0 = 1\}}{P\{X_5 = 0 | X_0 = 1\}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 1}{\frac{55}{72}} = \underline{\underline{\frac{48}{55}}}. \end{aligned}$$

b)

Har at $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow s-1$, mens $0 \not\leftrightarrow 1$ og $s \not\leftrightarrow s-1$. Vi får dermed tre ekvivalensklasser $\{0\}$, $\{1, 2, \dots, s-1\}$ og $\{s\}$.

$d(0) = 1$ siden $P_{00} > 0$. Tilsvarende er $d(s) = 1$ siden $P_{ss} > 0$. For tilstand 1 får man at $P_{11}^1 = 0, P_{11}^2 > 0, P_{11}^3 = 0, P_{11}^4 > 0$ og videre er $P_{11}^n = 0$ for n odde og $P_{11}^n > 0$ for n like. Dermed er $d(1)$ lik største felles divisor for $2, 4, 6, 8, 10, \dots$, som er 2. Siden alle tilstander i samme ekvivalensklasse har samme periode blir dermed $d(1) = d(2) = \dots = d(s-1) = 2$.

Tilstand 0 og s er rekurrent siden de er absorberende tilstander. Vi ser at tilstand 1 kun vil bli besøkt et endelig antall ganger fordi hver gang kjeden besøker tilstand 1 vil det være (minst) en sannsynlighet $\frac{1}{2}$ for at den aldri mer kommer tilbake. Tilstand 1 er dermed transient. Siden dette er en klasseegenskap blir dermed alle tilstandene $1, 2, \dots, s-1$ transiente.

Markovkjeden har ikke en grensefordeling siden den verken er irreduksibel, aperiodisk eller rekurrent.

c)

Det er opplagt at

$$u_0^s = 0 \quad \text{og} \quad u_s^s = 1. \quad (1)$$

De øvrige ligningene i ligningssystemet finner vi ved å betinge på hva som skjer ved tidspunkt 1,

$$u_i^s = P_{i,i-1}u_{i-1}^s + P_{i,i+1}u_{i+1}^s \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, s-1.$$

Dvs.

$$u_i^s = \frac{i}{i+1}u_{i-1}^s + \frac{1}{i+1}u_{i+1}^s \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, s-1 \quad (2)$$

Multipliserer med $i+1$ på begge sider,

$$(i+1)u_i^s = iu_{i-1}^s + u_{i+1}^s \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, s-1.$$

Løser denne ved hensyn på u_{i+1}^s

$$u_{i+1}^s = (i+1)u_i^s - iu_{i-1}^s.$$

Erstatter så i med $i-1$ og får

$$u_i^s = iu_{i-1}^s - (i-1)u_{i-2}^s \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, s.$$

Dette er åpenbart oppfylt for $u_i^s = a_i/a_s$ dersom a_i 'ene oppfyller rekursjonsligningen (a_s forkortes)

$$a_i = ia_{i-1} - (i-1)a_{i-2} \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, s.$$

Ved å benytte denne rekursjonsligningen, samt initialverdiene $a_0 = 0$ og $a_1 = 1$ får vi at

$$a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 10, \quad a_5 = 34, \quad a_6 = 154 \quad \text{og} \quad a_7 = 874,$$

som gir at

$$u_3^s = \frac{4}{34} = \frac{2}{\underline{\underline{17}}} \quad \text{og} \quad u_4^s = \frac{10}{874} = \frac{5}{\underline{\underline{437}}}.$$

d)

Det (i hvert fall matematisk) enkleste blir her å betinge på om kjeden noen gang kommer til å besøke tilstand 0. La N betegne antall besøk til tilstand 0. Da får vi

$$v_i^s = E[N|X_0 = i] = E[N|X_0 = i, N > 0]P\{N > 0|X_0 = i\} \\ + E[N|X_0 = i, N = 0]P\{N = 0|X_0 = i\}.$$

Man må åpenbart ha at $E[N|X_0 = i, N = 0] = 0$. Dessuten må $P\{N > 0|X_0 = i\} = 1 - u_i^s$ siden hendelsen $N > 0$ er identisk med hendelsen at tilstand 0 nås før tilstand s . (Merk at de endrede P_{00} og P_{01} ikke vil bety noe her!) Endelig må $E[N|X_0 = i, N > 0] = E[N|X_0 = 0]$ på grunn av markovegenskapen. Dermed har vi at

$$v_i^s = E[N|X_0 = 0] \cdot \left(1 - \frac{a_i}{a_s}\right).$$

Men når $X_0 = 0$ må N bli geometrisk fordelt. Hver gang tilstand 0 besøkes vil kjeden først gå til tilstand 1 og deretter vil det være en sannsynlighet u_1^s for at den aldri kommer tilbake til tilstand 0. N blir derfor geometrisk fordelt med suksesssannsynlighet $p = u_1^s = 1/a_s$. Dermed får vi

$$\underline{\underline{v_i^s}} = \frac{1}{\frac{1}{a_s}} \cdot \left(1 - \frac{a_i}{a_s}\right) = \underline{\underline{a_s - a_i}}.$$

Alternativt kan man starte med å betinge på verdien til X_1 og dermed få et lineært ligningssystem for $v_i^s; i = 0, 1, \dots, s$. Dersom man velger å telle antall ganger kjeden forlater tilstand 0 får man ligningssystemet

$$v_1^s = 1 + v_0^s \quad \text{og} \quad v_i^s = \frac{i}{i+1}v_{i-1}^s + \frac{1}{i+1}v_{i+1}^s \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, s-1.$$

Løser man så dette ligningssystemet sammen med randbetingelsen $v_s^s = 0$ skal man etter litt jobbing få samme svar som over.

Oppgave 2

a)

Kumulativ fordelingsfunksjon for $X = F^{-1}(U)$ blir

$$P\{X \leq x\} = P\{F^{-1}(U) \leq x\} = P\{U \leq F(x)\} = F_U(F(x)) = F(x),$$

fordi $F_U(u) = u$ for $u \in [0, 1]$ og $F(x) \in [0, 1]$.

For en eksponensialfordeling med parameter λ har vi

$$F(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}.$$

Den inverse funksjonen av $F(x)$ finner vi dermed ved

$$u = F(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\} \Leftrightarrow x = F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u).$$

Algoritmen blir dermed

- Trekk U fra en uniformfordeling på intervallet $[0, 1]$.
- La $X = -\ln(1 - U)/\lambda$.

[Alternativt kan man sette $X = -\ln U/\lambda$ siden U og $1 - U$ har samme fordeling når U er uniformfordelt på $[0, 1]$]

b)

I dette punktet finnes det uendelig mange riktige svar (og om mulig enda flere som ikke er riktige). Det mest nærliggende svaret er nok å foreslå uavhengige og eksponensialfordelte X_i 'er. Dvs. forslagsfordelingen blir

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x_i} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\lambda(x_1+x_2+\dots+x_n)} & \text{for } x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Dermed blir

$$c = \max_{x_1, x_2, \dots, x_n > 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{g(x_1, x_2, \dots, x_n)} = k,$$

slik at akseptanssynligheten blir

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{cg(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 1$$

for $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ (og det er kun dette tilfellet som er interessant siden negative x_i 'er aldri vil bli generert). Simuleringsalgoritmen blir dermed

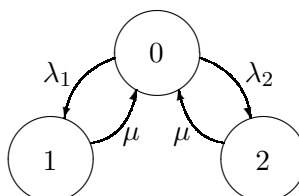
1. Generer $U_1, U_2, \dots, U_n$ uavhengig og uniformfordelt på intervallet $[0, 1]$.
2. Beregn $X_i = -\ln U_i/\lambda$ for $i = 1, 2, \dots, n$.
3. Hvis $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$ er man ferdig, hvis ikke gå tilbake til punkt 1.

Dersom n er stor vil det bli svært liten sannsynlighet for at $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$ i punkt 3. Dermed vil forventet antall ganger man må utføre punkt 2 og 3 bli svært stort og algoritmen tilsvarende lite effektiv.

Oppgave 3

a)

Skjema for markovprosessen blir



La T være tiden til maskinen feiler første gang. Da blir T eksponensialfordelt med intensitet $\lambda_1 + \lambda_2$. Dermed

$$P\{T \geq t\} = 1 - P\{T < t\} = 1 - (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}) = \underline{\underline{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}}.$$

For $i = 1, 2$, la T_i være tiden da komponent i feiler første gang. Da blir

$$\underline{\underline{P\{T_1 < T_2\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}}.$$

b)

Ligningssystemet for grensefordelingen til $X(t)$ blir

tilstand	ankomstrate = avgangsrate	
0	$P_1\mu + P_2\mu = P_0(\lambda_1 + \lambda_2)$	(A)
1	$P_0\lambda_1 = P_1\mu$	(B)
2	$P_0\lambda_2 = P_2\mu$	(C)

og dessuten

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1. \quad (\text{D})$$

Ligning (B) og (C) gir, henholdsvis,

$$P_1 = P_0 \frac{\lambda_1}{\mu} \quad \text{og} \quad P_2 = P_0 \frac{\lambda_2}{\mu},$$

som innsatt i ligning (D) gir

$$P_0 \cdot \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu} + \frac{\lambda_2}{\mu}\right) = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

Dette gir dermed også

$$P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{og} \quad P_2 = \frac{\lambda_2}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

$$\text{Andel av tid under reparasjon} = P_1 + P_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

$$\text{Antall feil pr. tidsenhet} = P_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\mu(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

c)

Kolmogorovs foroverligninger gir

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= \mu P_1(t) + \mu P_2(t) - (\lambda_1 + \lambda_2)P_0(t), \\ P'_1(t) &= \lambda_1 P_0(t) - \mu P_1(t), \\ P'_2(t) &= \lambda_2 P_0(t) - \mu P_2(t). \end{aligned}$$

Tilhørende initialbetingelsene blir

$$\begin{aligned} P_0(0) &= P\{X(0) = 0 | X(0) = 0\} = 1, \\ P_1(0) &= P\{X(0) = 1 | X(0) = 0\} = 0, \\ P_2(0) &= P\{X(0) = 2 | X(0) = 0\} = 0. \end{aligned}$$

d)

Fra initialbetingelsene får man

$$\begin{aligned} P_0(0) = \alpha_0 + \beta_0 = 1 &\Rightarrow \alpha_0 = 1 - \beta_0, \\ P_1(0) = \alpha_1 + \beta_1 = 0 &\Rightarrow \alpha_1 = -\beta_1, \\ P_2(0) = \alpha_2 + \beta_2 = 0 &\Rightarrow \alpha_2 = -\beta_2. \end{aligned}$$

De tre differensialligningene er lineært avhengige (summerer man de tre ligningene får man 0 på begge sider). Det er derfor nok å benytte to av de tre ligningene (pluss kravet at $P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1$ for alle $t \geq 0$). Benytter de to siste. Den andre differensialligningen gir

$$-\gamma \beta_1 e^{-\gamma t} = \lambda_1 (1 - \beta_0 + \beta_0 e^{-\gamma t}) - \mu (-\beta_1 + \beta_1 e^{-\gamma t}),$$

dvs

$$-\gamma \beta_1 e^{-\gamma t} = \lambda_1 - \lambda_1 \beta_0 + \lambda_1 \beta_0 e^{-\gamma t} + \mu \beta_1 - \mu \beta_1 e^{-\gamma t}.$$

Dette gir dermed at

$$\lambda_1 - \lambda_1\beta_0 + \mu\beta_1 = 0 \quad \text{og} \quad -\gamma\beta_1 = \lambda_1\beta_0 - \mu\beta_1,$$

som gir

$$\beta_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}(\beta_0 - 1) \quad \text{og} \quad \gamma = \mu - \lambda_1 \frac{\beta_0}{\beta_1}. \quad (3)$$

Helt tilsvarende gir den tredje differensialligningen at

$$\beta_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}(\beta_0 - 1) \quad \text{og} \quad \gamma = \mu - \lambda_2 \frac{\beta_0}{\beta_2}. \quad (4)$$

Kravet $P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1$ gir at

$$1 - \beta_0 + \beta_0 e^{-\gamma t} - \beta_1 + \beta_1 e^{-\gamma t} - \beta_2 + \beta_2 e^{-\gamma t} = 1,$$

som er oppfylt dersom

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0. \quad (5)$$

De første ligningene i (3) og (4) sammen med (5) gir at

$$\beta_0 + \frac{\lambda_1}{\mu}(\beta_0 - 1) + \frac{\lambda_2}{\mu}(\beta_0 - 1) = 0.$$

Dette gir dermed

$$\beta_0 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu} + \frac{\lambda_2}{\mu} \right) = \frac{\lambda_1}{\mu} + \frac{\lambda_2}{\mu} \Rightarrow \underline{\underline{\beta_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}}}.$$

Setter man så dette inn i de første ligningene i (3) og (4) får man

$$\underline{\underline{\beta_1 = -\frac{\lambda_1}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\beta_2 = -\frac{\lambda_2}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}}}.$$

Setter man dette inn i den siste ligningen i (3) eller (4) får man videre

$$\underline{\underline{\gamma = \mu + \lambda_1 + \lambda_2}}}.$$

Til slutt gir uttrykkene for β_i 'ene følgende α_i 'er

$$\underline{\underline{\alpha_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}}}, \quad \underline{\underline{\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}}}$$

Finner grensefordelingen ved å la $t \rightarrow \infty$

$$\underline{\underline{P_0}} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t) = \alpha_0 = \underline{\underline{\frac{\mu}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}}},$$

$$\underline{\underline{P_1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t) = \alpha_1 = \underline{\underline{\frac{\lambda_1}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}}}$$

og

$$\underline{\underline{P_2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_2(t) = \alpha_2 = \underline{\underline{\frac{\lambda_2}{\mu + \lambda_1 + \lambda_2}}}.$$