Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 38

EKSAMEN I EMNE TMA4265/SIF5072 STOKASTISKE PROSESSER
Onsdag 10. august 2005
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Ett gult ark (A5 med stempel) med egne formler og notater.

Sensur er ferdig: 31. august 2005.

Oppgave 1

I kurset har vi som kjent sett på to forskjellige definisjoner for en poissonprosess. Disse er

Definisjon 1: En telleprosess $\{N(t); t \geq 0\}$ sies å være en poissonprosess med intensitet $\lambda > 0$ dersom

(*i*) $\mathrm{N}(0) = 0$.
(*ii*) Prosessen har uavhengige inkrementer.
(*iii*) Antall hendelser i ethvert intervall av lengde s er poissonfordelt med forventning lik λs. Dvs. for alle $s, t > 0$ har vi at

$$\mathrm{P}\{N(t+s) - N(t) = n\} = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Definisjon 2: En telleprosess $\{N(t); t \geq 0\}$ sies å være en poissonprosess med intensitet $\lambda > 0$ dersom

(a) $N(0) = 0$.
(b) Prosessen har stasjonære og uavhengige inkrementer.
(c) $\mathrm{P}\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$.
(d) $\mathrm{P}\{N(h) \geq 2\} = o(h)$.

a) Hva betyr det at en funksjon er $o(h)$? Gi en presis matematisk definisjon av begrepet $o(h)$.

Gi to eksempler på funksjoner som er $o(h)$ og to eksempler på funksjoner som ikke er $o(h)$. Vis også at de funksjonene du oppgir er henholdsvis $o(h)$ og ikke $o(h)$.

På forelesning har vi sett hvordan definisjon 2 medfører definisjon 1. I neste punkt skal vi se på implikasjonen motsatt vei.

b) Gi en matematisk definisjon av hva det betyr at en stokastisk prosess har stasjonære inkrementer. Forklar hvordan definisjon 1 impliserer krav (b) i definisjon 2.

Vis at definisjon 1 impliserer at kravene (c) og (d) i definisjon 2 er oppfylt.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi betrakte et diskret-tid køsystem som gir opphav til en markovkjede. Vi skal forutsette at ved hvert tidspunkt $n = 1, 2, \ldots$ ankommer et tilfeldig antall nye kunder samtidig. Hvor mange nye kunder som ankommer på ulike tidspunkt antar vi er uavhengig av hverandre og på hvert tidspunkt har antall nye kunder som ankommer følgende sannsynlighetsfordeling,

$$\mathrm{P}\{Z = i\} = p(1-p)^i \quad \text{for } i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Videre skal vi anta at alle kunder har lik behandlingstid og denne er lik en tidsenhet. Køsystemet har kun en behandlingsenhet slik at kun en kunde kan behandles om gangen. Når flere kunder ankommer på samme tidspunkt avgjøres det ved loddtrekning hvilken rekkfølge disse får i køen. Vi skal la X_n betegne antall kunder i køsystemet ved tidspunkt n. Kjeden $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ blir da en markovkjede med overgangssannsynligheter gitt ved

$$\mathrm{P}_{ij} = \begin{cases} p(1-p)^j & \text{for } i = 0 \text{ og } j = 0, 1, 2, \ldots, \\ p(1-p)^{j-i+1} & \text{for } i = 1, 2, \ldots \text{ og } j = i-1, i, i+1, i+2, \ldots, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Tegn et skjema over markovkjeden $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$.

For $p = 0.5$ og gitt at $X_n = 2$, hva er sannsynligheten for at $X_{n+2} = 1$?

For $p = 0.5$ og gitt at $X_n = 2$, hva er sannsynligheten for at $X_{n+3} = 1$?

b) Bestem markovkjedens ekvivalensklasser og bestem perioden for hver tilstand. (Svarene skal begrunnes!)

Kan du intuitivt innse et krav som forventet antall nye kunder som ankommer ved hvert tidspunkt må oppfylle for at køsystemet $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ skal ha en entydig grensefordeling? (Begrunn svaret!) Hvilke krav gir dette på verdien av parameteren p?

I resten av oppgaven skal vi forutsette at verdien av p er slik at markovkjeden har en entydig grensefordeling, og vi lar som vanlig π_j betegne denne grensefordelingen.

c) Vis ved induksjon at

$$\pi_j = \pi_0 \left(\frac{1-p}{p} \right)^j \quad \text{for } j = 0, 1, 2, \ldots$$

Vis også at

$$\pi_0 = 2 - \frac{1}{p}.$$

d) I det lange løp, hvor mange kunder vil det i gjennomsnitt være i køsystemet?

I det lange løp, hvor stor andel av kundene vil ankomme mens køsystemet er tomt?

I det lange løp, hvor stor andel av kundene vil gå direkte til behandling (dvs. slippe å vente uvirksomme i kø)?

I de to siste punktene i denne oppgaven skal vi i stedet for ligning (1) anta at sannsynlighetsfordelingen for antallet som ankommer ved hvert tidspunkt har en vilkårlig sannsynlighetsfordeling gitt ved

$$\mathrm{P}\{Z = i\} = \alpha_i \quad \text{for } i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

der $\alpha_i \geq 0$ for alle $i = 0, 1, 2, \ldots$ og $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1$. Vi lar μ og σ^2 betegne henholdsvis forventningsverdi og varians for antall personer som ankommer på hvert tidspunkt. Forøvrig forutsetter vi at køsystemet er som beskrevet tidligere i oppgaven.

e) Benytt betalingsregelen at hver kunde betaler ved hvert (diskrete) tidspunkt y kroner, der y er gjenværende behandlingstid for denne kunden, til å utlede en kostidentitet som for vårt køsystem forbinder gjenværende arbeid i systemet, V, og gjennomsnittlig tid en kunde er i kø, W_Q.

f) Utled en annen sammenheng mellom V og W_Q ved å følge en tilfeldig kunde gjennom køsystemet.

Finn W_Q uttrykt ved μ og σ^2.

Formelsamling:

Setningene om total sannsynlighet og dobbelforventning

La $B_1, B_2, \ldots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$
$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For en irredusibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ og er gitt av ligningene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i, s_{ij},

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å returnere til tilstand j gitt start i tilstand i, f_{ij},

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n-te hendelse (n-te arrival time), S_n, har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \ldots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs forover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorovs bakover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Hvis $P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ eksisterer, er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Kø-teori

For gjennomsnittlig antall kunder i systemet, L, gjennomsnittlig tid pr. kunde i systemet, W, betjeningstid, S, og gjennomsnittlig gjenværende arbeid i systemet, V, gjelder

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_q = \lambda_a W_q.$$

$$V = \lambda_a E[S W_q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$