TMA4265 Stokastiske prosesser

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Eksamen august 2005

Oppgave 1

a)

En funksjon $f(x)$ sies å være $o(h)$ dersom

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Eksempler på funksjoner som er $o(h)$:

1. $f(x) = x^2$ er $o(h)$ fordi $\lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$.
2. $f(x) = e^{x^2}$ er $o(h)$ fordi $\lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}\cdot 2h}{1} = 0$ [ved bruk av L'Hôpitals regel].

Eksempler på funksjoner som ikke er $o(h)$:

1. $f(x) = 1$ er ikke $o(h)$ fordi $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} = \infty \neq 0$.
2. $f(x) = h$ er ikke $o(h)$ fordi $\lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \neq 0$.

b)

En prosess $\{N(t); t \geq 0\}$ har stasjonære inkrementer dersom sannsynlighetsfordelingen til $N(t+s) - N(t)$ kun avhenger av s, dvs. ikke avhenger av t.

At prosessen har uavhengige inkrementer er direkte gitt av krav (ii) i definisjon 1. Fra krav (iii) i definisjon 1 ser vi sannsynlighetsfordelingen for $N(t+s) - N(t)$ ikke avhenger av t, dvs. prosessen har stasjonære inkrementer. Følgelig er krav (b) oppfyllt.

Fra (iii) i definisjon 1 følger det at

$$\mathrm{P}\{N(h) = 1\} = \mathrm{P}\{N(0+h) - N(0) = 1\} = \frac{(\lambda h)^1}{1!} e^{-\lambda h} = \lambda h + \lambda h(e^{-\lambda h} - 1).$$

Dessuten har vi at $\lambda h(e^{-\lambda h} - 1)$ er $o(h)$ fordi

$$\lim_{h\to 0} \frac{\lambda h(e^{-\lambda h} - 1)}{h} = \lambda \lim_{h\to 0}(e^{-\lambda h} - 1) = 0,$$

slik at krav (c) er oppfylt.

For å vise at krav (d) er oppfylt, starter vi med å se på

$$\mathrm{P}\{N(h) \geq 2\} = 1 - \mathrm{P}\{N(h) = 0\} - \mathrm{P}\{N(h) = 1\}$$

$$= 1 - \mathrm{P}\{N(0+h) - N(0) = 0\} - \mathrm{P}\{N(0+h) - N(0) = 1\}$$

$$= 1 - \frac{(\lambda h)^0}{0!}e^{-\lambda h} - \frac{(\lambda h)^1}{1!}e^{-\lambda h} = 1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h}.$$

Ved hjelp av L'Hôpitals regel får vi da at

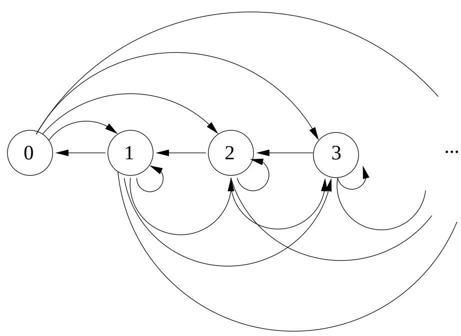
$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}\{N(h) \geq 2\}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0 + \lambda e^{-\lambda h} - \lambda e^{-\lambda h} + \lambda^2 h e^{-\lambda h}}{1} = 0.$$

Dvs. $\mathrm{P}\{N(h) \geq 2\} = o(h)$ og (d) er bevist.

Oppgave 2

a)



$$\mathrm{P}\{X_{n+2} = 1 | X_n = 2\} = P_{22}P_{21} + P_{21}P_{11} = p(1-p)\cdot p + p \cdot p(1-p) = 2p(1-p) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

$$\mathrm{P}\{X_{n+3}=1|X_n=2\} = P_{23}P_{32}P_{21}+P_{22}P_{22}P_{21}+P_{22}P_{21}P_{11}+P_{21}P_{12}P_{21}+P_{21}P_{11}P_{11}+P_{21}P_{10}P_{01}$$

$$= p(1-p)^2pp+p(1-p)p(1-p)p+p(1-p)pp(1-p)+pp(1-p)^2p+pp(1-p)p(1-p)+ppp(1-p)$$

$$= 5p^3(1-p)^2+p^3(1-p) = \underline{\underline{0.21875}}.$$

b)

Alle tilstander kommuniserer siden $P_{i,i+1} > 0$ for alle $i \geq 0$ og $P_{i,i-1} > 0$ for alle $i > 0$. Følgelig er alle tilstander i samme ekvivalensklasse.

Da $P_{11} > 0$ har tilstand 1 periode lik 1, siden alle tilstander er i samme ekvivalensklasse har dermed alle tilstandene periode lik 1.

For at køsystemet skal ha en entydig grensefordeling må forventet antall nye kunder som ankommer pr tidsenhet være mindre enn behandlingskapasiteten pr tidsenhet. For vårt køsystem betyr dette at

$$\mathrm{E}[Z] = \sum_{i=0}^{\infty} i\ \mathrm{P}\{Z=i\} < 1.$$

Dette gir at

$$\sum_{i=0}^{\infty} ip(1-p)^i = p\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^i = p\cdot\frac{1-p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1-p}{p} < 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{p > \frac{1}{2}}}.$$

c)

Skal ved induksjon vise at

$$\pi_j = \pi_0\left(\frac{1-p}{p}\right)^j \quad \text{for } j=0,1,\ldots$$

Dette er opplagt riktig for $j=0$. Antar at det er korrekt for $j=0,1,\ldots,k$, må sjekke formel for $j=k+1$, tar utgangspunkt i formel som grensefordelingen må oppfylle,

$$\pi_k = \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i P_{ik}$$

$$\pi_k = \pi_0 P_{0k}+\pi_1 P_{1k}+\ldots+\pi_k P_{kk}+\pi_{k+1}P_{k+1,k}$$

$$\pi_k = \pi_0 p(1-p)^k + \sum_{j=1}^{k-1}\pi_j p(1-p)^{k-j+1} + \pi_k p(1-p) + \pi_{k+1}p$$

$$\Rightarrow p\pi_{k+1} = \pi_0 \left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \pi_0 p(1-p)^k - \sum_{j=1}^{k-1} \pi_0 \left(\frac{1-p}{p}\right)^j p(1-p)^{k-j+1} - \pi_0 \left(\frac{1-p}{p}\right)^k p(1-p)$$

$$= \pi_0 \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \left[1 - p^{k+1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{p^k}{(1-p)^k} \frac{(1-p)^j}{p^j} p(1-p)^{k-j+1} - p(1-p)\right]$$

$$= \pi_0 \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \left[1 - p^{k+1} - p^{k+1}(1-p)\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{k-2} \left(\frac{1}{p}\right)^j - p(1-p)\right]$$

$$= \pi_0 \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \left[1 - p^{k+1} - p^k(1-p)\frac{1-\left(\frac{1}{p}\right)^{k-1}}{1-\frac{1}{p}} - p(1-p)\right]$$

$$= \pi_0 \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \left[1 - p^{k+1} + p^{k+1} - p^2 - p + p^2\right]$$

$$\Rightarrow \pi_{k+1} = \pi_0 \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+1}$$

Dvs. formelen gjelder også for $i = k+1$.
Finner π_0 ved ut fra kravet

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

$$\pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j = \pi_0 \frac{1}{1-\frac{1-p}{p}} = \pi_0 \frac{p}{p-1+p} \Rightarrow \underline{\underline{\pi_0}} = \frac{2p-1}{p} = \underline{\underline{2 - \frac{1}{p}}}$$

d)
Antall kunder i køsystemet i gjennomsnitt i det lange løp:

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j = \left(2 - \frac{1}{p}\right) \sum_{j=0}^{\infty} j \left(\frac{1-p}{p}\right)^j = \left(2 - \frac{1}{p}\right) \frac{\frac{1-p}{p}}{\left(1 - \frac{1-p}{p}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{1-p}{2p-1}}}$$

Siden ankomstprosessen er uavhengig av hvor mange kunder som er i køsystemet får vi at andel av kundene som ankommer mens køsystemet er tomt er lik andel av tiden køsystemet er tomt, dvs.

$$\underline{\underline{\pi_0 = 2 - \frac{1}{p}}}$$

For at en kunde skal gå direkte til behandling må to ting være oppfylt, køsystemet må være tomt når kunden ankommer og denne kunden må være den som går først inn i køsystemet i sin gruppe. Andelen som ankommer mens køsystemet er tomt er lik π_0. For å finne sannsynligheten for at en tilfeldig kunde blir først i sin gruppe finner vi først sannsynligheten for k kunder i gruppa til en tilfeldig valgt kunde

$$q_k = \mathrm{P}\{\text{k kunder i gruppa til en tilfeldig kunde}\} = \frac{k\mathrm{P}\{Z=k\}}{\sum_{j=0}^{\infty} j\mathrm{P}\{Z=j\}}$$

$$= \frac{kp(1-p)^k}{\sum_{j=0}^{\infty} jp(1-p)^j} = \frac{kp(1-p)^k}{p\frac{1-p}{(1-(1-p))^2}} = kp^2(1-p)^{k-1}.$$

Betinger så på antall personer i gruppa til vår kunde og får

$$\mathrm{P}\{\text{tilfeldig kunde går inn først i sin gruppa}\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\text{tilfeldig kunde går inn først i sin gruppe}|k \text{ personer i gruppa}\} \cdot \mathrm{P}\{k \text{ personer i gruppa}\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot q_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} kp^2(1-p)^{k-1} = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p^2 \frac{1}{1-(1-p)} = p$$

Dvs. andel av kundene som går direkte til behandling blir

$$\pi_0 p = \underline{\underline{2p-1}}$$

e)

Den generelle kostidentiteten er

$$\text{Gjennomsnittlig inntekt pr tidsenhet} = \lambda_a \times \text{Gjennomsnittlig beløp betalt av hver kunde.}$$

Med den foreslåtte betalingsregel får vi

$$\text{Gjennomsnittlig inntekt pr tidsenhet} = V \quad \text{og} \quad \lambda_a = \mathrm{E}[Z] = \mu,$$

mens (husk at $S = 1$)

$$\text{Beløp betalt av kunde} = W_Q^\star + 1$$

Dermed blir

$$\text{Gjennomsnittlig beløp betalt av hver kunde} = W_Q + 1$$

og identiteten blir

$$\underline{\underline{V = \mu(W_Q + 1)}}$$

f)

Følger så en tilfeldig person gjennom køsystemet. Siden vår person ankommer på et tilfeldig tidspunkt uavhengig av antall i kø blir forventet tid for vår person i kø lik gjennomsnittlig arbeid i køsystemet pluss tiden han må vente i kø på grunn av andre kunder som ankommer i samme gruppe som han selv. Dvs

$$W_Q = V + \frac{1}{2}\mathrm{E}[\text{antall andre kunder i gruppa til vår kunde}]$$

der (benytter at sannsynligheten for k kunder i gruppa til vår mann er $k\alpha_k/\mu$)

$$\mathrm{E}[\text{antall andre kunder i gruppa til vår mann}] = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{k\alpha_k}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu}(\mathrm{E}[Z^2] - \mathrm{E}[Z]) = \frac{1}{\mu}(\sigma^2 + \mu^2 - \mu).$$

Dermed får man at

$$\underline{\underline{W_Q = V + \frac{1}{2\mu}(\sigma^2 + \mu^2 - \mu)}}$$

De to ligningene sammen gir

$$W_Q = \mu(W_Q + 1) + \frac{1}{2\mu}(\sigma^2 + \mu^2 - \mu)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{W_Q = \frac{\frac{\sigma^2}{2\mu} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu}{1-\mu}}}.$$

Merk: formelen gjelder kun for $\mu < 1$. Dersom $\mu \geq 1$ vil det ikke finnes noen grensefordeling.