Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Henning Omre 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG 75561 STOKASTISKE PROSESSER

Fredag 14. august 1998
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: K. Rottman: Mathematische Formelsamlung.
Barnett og Cronin: Mathematical Formulae.
Statistiske tabeller og formler, Tapir.
Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
Selvlaget gult titteark på A5-ark utdelt av foreleser.

Oppgave 1 Myntkast

Betrakt en mynt som kastes gjentatte ganger. Hvert myntkast resulterer i krone (K) eller mynt (M), med sannsynlighet 1/2 for hvert av de to mulige utfall. Resultatet av en rekke med kast kan dermed skrives som en følge av K'er og M'er, for eksempel KKKMMKMKMMKMMK.

Vi skal først se på en situasjon der myntkastene avsluttes første gang sekvensen MMM opptrer. Dvs. en fortsetter å kaste inntil tre etterfølgende kast gir mynt som resultat. La T være antall kast som må utføres. Definer videre Markov-kjeden $\{X_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ der X_n for $n \leq T$ er antall M'er på slutten av kastsekvensen etter at totalt n myntkast er utført. For eksempel (for $n = 5$), dersom sekvensen ble MMKKM så er $X_5 = 1$, dersom sekvensen ble KMKMM så er $X_5 = 2$, mens dersom sekvensen ble KMMKK så er $X_5 = 0$. For $n > T$ lar vi $X_n = 3$ slik at 3 blir en absorberende tilstand for kjeden.

Dermed får vi at overgangsmatrisen for $\{X_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ blir

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Dessuten har en selvølgelig at $X_0 = 0$.

a) Bestem sannsynlighetene

$$\Pr\{X_2 = 1 | X_0 = 0\} \quad , \quad \Pr\{X_3 = 0 | X_0 = 0\} \quad \text{og} \quad \Pr\{X_4 = 3 | X_0 = 0\}$$

b) Hva er forventet antall myntkast til sekvensen MMM opptrer første gang?

Vi skal så beregne forventet antall kast til sekvensen MKK opptrer første gang. Anta derfor i punkt **c**) at myntkastene avsluttes første gang sekvensen MKK opptrer.

c) Spesifiser en ny Markov-kjede, med tilhørende overgangsmatrise, som kan være nyttig i denne situasjonen.

Finn forventet antall myntkast til sekvensen MKK opptrer første gang.

Kan du gi en intuitiv forklaring på hvorfor forventet antall myntkast til sekvensen MKK opptrer første gang er mindre enn svaret i punkt **b**)?

Til slutt i denne oppgaven skal vi igjen konsentere vår oppmerksomhet på sekvensen MMM, men antar nå at man fortsetter med myntkastene også etter at denne sekvensen opptrer første gang. Dermed vil tilstand 3 ikke lenger være en absorberende tilstand og overgangsmatrisen blir nå

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{array}\right] \end{array}$$

d) Finn en stasjonærfordeling for denne Markov-kjeden.

Har denne Markov-kjeden er grensefordeling? (Begrunn svaret.)

I det lange løp, etter hvor stor andel av kastene vil resultatet i de tre siste kastene være MMM?

Oppgave 2

En stasjonær Markov-kjede på tilstandsrommet $\{0,1,2,3,4,5\}$ har følgende overgangsmatrise

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

Bestem ekvivalensklassene for denne overgangsmatrisen.

Klassifiser hver tilstand som transient eller rekurrent. (Begrunn svarene)

Bestem $\lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = i | X_0 = 5\}$ for $i = 0,1,2,3,4,5$.

Oppgave 3 Papirfabrikken

En papirfabrikk har to papirmaskiner, PM1 og PM2. De ansatte på fabrikken arbeider i helkontinuerlige skift, så dersom maskinene fungerer som de skal produseres papir 24 timer i døgnet. Men av og til oppstår det feil ved en maskin og da må maskinen repareres før produksjonen fra den maskinen kan gjenopptas. Derfor er der til enhver tid én reparatør til stede på fabrikken.

Vi skal i denne oppgaven anta følgende enkle modell for situasjonen. Tid fra en maskin er ferdigreparert til det igjen oppstår en feil ved denne maskinen er eksponensialfordelt med parameter μ (pr. time), og denne parameteren er felles for begge maskinene. Dessuten antar vi at maskinene feiler uavhengig av hverandre. Tiden det tar å reparere en maskin er eksponensialfordelt med parameter λ (pr. time). Vi skal dessuten anta at alle reparasjonstider er uavhengige av hverandre og uavhengig av hvor lang tid maskinene fungerer før feil oppstår. Merk at siden fabrikken bare har en reparatør er det kun en maskin som kan repareres om gangen, så dersom det oppstår en feil ved maskin PM2 mens maskin PM1 er under reparasjon vil reparasjonen av PM2 starte først når PM1 er ferdigreparert.

La $X(t)$ betegne antall maskiner som er i produksjon ved tid t.

a) Begrunn kort at $X(t)$ blir en fødsels- og dødsprosess med tilstandsrom $\Omega = \{0,1,2\}$. Spesifiser fødsels- og døds-intensitetene.

b) Skriv opp forover Kolmogorov-ligningene for den aktuelle situasjonen.

Utled fra disse ligningene et ligningssystem for grensefordelingen.

Vis ved å løse ligningssystemet at

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\theta+\frac{1}{2}\theta^2} \quad ; \quad \pi_1 = \frac{\theta}{1+\theta+\frac{1}{2}\theta^2} \quad \text{og} \quad \pi_1 = \frac{\frac{1}{2}\theta^2}{1+\theta+\frac{1}{2}\theta^2},$$

der $\theta = \frac{\lambda}{\mu}$.

For å redusere tiden maskinene er ute av drift, vurderer fabrikken å innføre en ordning der to reparatører til enhver tid er tilgjengelige. Dermed kan reparasjon alltid starte umiddelbart når en maskin feiler. Merk deg dog at feilene som oppstår er av en slik art at det ikke er noe tid å spare på at begge reparatørene samtidig arbeider med samme maskin. Dermed, dersom PM1 er i produksjon og PM2 har feilet, vil en reparatør arbeide med å repararer PM2, mens den andre reparatøren vil sitte å se på.

Hver maskin som er ute av drift gir fabrikken en tap på α kr. pr. time. På den annen side vil det koste fabrikken β kr. pr. time ekstra å innføre ordningen med to reparatører.

c) For den nåværende ordningen med en reparatør, finn hvor mye fabrikken i gjennomsnitt taper pr. time fordi maskinene i perioder er ute av drift.

Utled en ligning for $\theta = \frac{\lambda}{\mu}$ slik at, i det lange løp, gjennomsnittlig inntekt med en reparatør er lik gjennomsnittlig inntekt med to reparatører. (Da det blir en tredjegradsligning kreves det ikke at du løser den.)

For $\alpha = 100\ 000$ og $\beta = 1\ 000$ har ligningen følgende tre løsninger: $\theta = -15.58$, 0.0102 og 12.57. Diskuter for hvilke verdier av θ det lønner seg for fabrikken å innføre ordningen med to reparatører og for hvilke verdier det lønner seg å beholde nåværende ordning. Gi videre en forklaring, ut fra situasjonen beskrevet over, på hva som skjer for de ulike intervallene for θ.

Formelsamling:

Setningen om total sannsynlighet og dobbelforventning:

La $B_1, B_2, \ldots$ være parvis disjunkte hendelser med $\Pr\{\cup_{i=1}^{\infty} B_i\} = 1$. Da gjelder

$$\Pr\{A|C\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A|B_i \cap C\}\Pr\{B_i|C\}$$

$$\mathrm{E}[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}[X|B_i \cap C]\Pr\{B_i|C\}$$

Noen matematiske rekker:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Markovkjeder i diskret tid:

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_k P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

$$P_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)}$$

Førstestegsanalyse:

La $g(i)$ være "kostnaden" i tilstand i, definert for alle transiente tilstander $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$. La T være absorbsjonstidspunktet for den absorberende tilstanden r, og la

$$w_i = \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} g(X_n)|X_0 = i\right].$$

Da har vi at

$$w_i = g(i) + \sum_{i=0}^{r-1} P_{ij} w_j \qquad \text{for} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, r-1.$$

Poisson-prosess:

W_n (tidspunkt for n-te hendelse) har sannsynlighetstetthet

$$f_{W_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Gitt at $X(t) = n$, så har $W_1, W_2, \ldots, W_n$ simultantetthet

$$f_{W_1,W_2,\ldots,W_n|X(t)}(w_1, w_2, \ldots, w_n|n) = \frac{n!}{t^n} \qquad \text{for} \quad 0 < w_1 < w_2 < \ldots < w_n \leq n.$$

Markovkjeder i kontinuerlig tid:

Forover Kolmogorov-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t),$$

og bakover Kolmogorov-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t),$$

med fødsels- og dødsrater $\lambda_i, \mu_i \geq 0$, samt $\lambda_{-1} = \mu_0 = 0$.

Grensefordeling i fødsels- og dødsprosesser:

Grensefordelingen i en fødsels- og dødsprosess med fødselsintensiteter $\lambda_k > 0$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ og dødsintensiteter $\mu_0 = 0$ og $\mu_k > 0$ for $k = 1, 2, \ldots$ er

$$\pi_k = \theta_k \pi_0 \qquad \text{for} \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad \text{og} \qquad \pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k}$$

der

$$\theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \qquad \text{for} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Differensialligning:

Differensialligningen

$$f'(t) + \alpha f(t) = g(t) \qquad \text{for} \quad t \geq 0$$

med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = a e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) \mathrm{d}s$$