Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 20

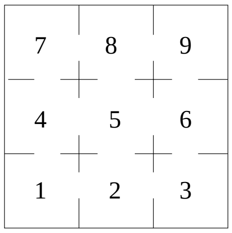
EKSAMEN I FAG 75561 STOKASTISKE PROSESSER

Torsdag 12. august 1999
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: K. Rottman: Mathematische Formelsamlung.
Barnett og Cronin: Mathematical Formulae.
Statistiske tabeller og formler, Tapir.
Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
Selvlaget gult titteark på A5-ark utdelt av foreleser.

Oppgave 1 Mus i labyrint

Betrakt følgende labyrint:



Anta at ei mus ved tidspunkt 0 plasseres i kupé nr. 1. Deretter begynner musa å vandre tilfeldig rundt i labyrinten. Mer presist skal vi anta følgende; dersom musa ved tidspunkt n er i kupé nr. i, vil den til tidspunkt $n+1$ ha beveget seg til en av nabokupéene til kupé nr. i, med like stor sannsynlighet for alle nabokupéene. For eksempel, dersom musa ved tidspunkt n er i kupé nr. 5, vil den ved tidspunkt $n+1$ være i kupé nr. 2, 4, 6 eller 8 med sannsynlighet $1/4$ for hver, mens dersom den er i kupé nr. 7 ved tidspunkt n, vil den ha beveget seg til kupé nr. 4 eller 8 (med sannsynlighet $1/2$ for hver) ved tidspunkt $n+1$.

La X_n være nummeret på kupéen der musa befinner seg ved tidspunkt n.

a) Skriv opp overgangssannsynlighetsmatrisa for markovkjeden $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$.

Bestem sannsynlighetene

$$\Pr\{X_2 = 5 | X_0 = 1\} \qquad \text{og} \qquad \Pr\{X_2 = 5 | X_0 = 1 \cap X_3 = 2\}.$$

b) Identifiser en del symmetrier i situasjonen som kan forenkle beregningen av forventet antall tidssteg til musa når kupé nr. 9 for første gang.

Finn forventet antall tidssteg til musa når kupé nr. 9 for første gang.

c) I det lange løp, hvor stor andel av tida vil musa oppholde seg i hver av de 9 kupéene ?

Anta at etter å ha satt musa ned i labyrinten, går vi og spiser en bedre middag før vi kommer tilbake for å observere musas endeløse gang i labyrinten. Det går så lang tid før vi kommer tilbake at vi ved dette tidspunkt kan anta at musas posisjon i labyrinten følger grensefordelingen. Bestem forventet antall tidssteg vi må observere musa etter at vi er kommet tilbake før vi for første gang ser den i kupé nr. 9.

Oppgave 2

En stasjonær markovkjede på tilstandsrommet $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ har følgende overgangsmatrise

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

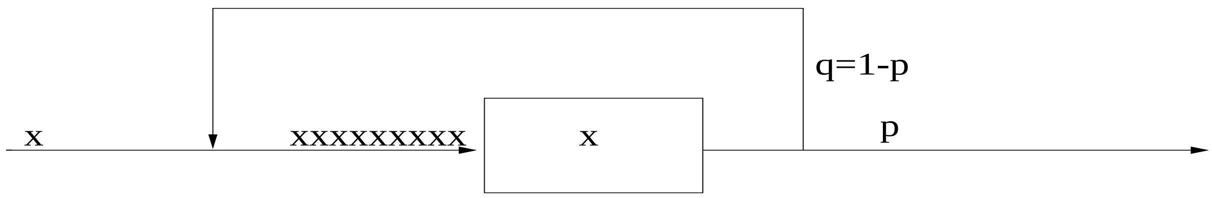
Finn ekvivalensklassene for markovkjeden. (Begrunn svaret !)

For hver tilstand, bestem tilstandens periode og klassifiser tilstanden som transient eller rekurrent. (Begrunn svarene !)

Har markovkjeden en entydig grensefordeling ? (Begrunn svaret !)

Oppgave 3 Kø-system

Anta at kunder ankommer et køsystem ifølge en stasjonær poissonprosess med intensitet λ. Kø-systemet har kun en behandlingsenhet og kundenes behandlingstider er uavhengige og eksponensialfordelt med forventning $1/\mu$. Vi antar dessuten at kundenes behandlingstider er uavhengig av ankomstprosessen. Når en kunde er ferdigbehandlet vil hun med sannsynlighet p (uavhengig av alt annet) forlate køsystemet, mens med sannsynlighet $q = 1 - p$ vil hun trenge en ny behandling og i så fall på nytt stille seg opp bakerst i køen. Ny behandlingstid har samme fordeling som den første. Når hun er ferdig med neste behandling vil hun, med samme sannsynlighet q, trenge enda en behandlig, og så videre. Køsystemet kan dermed visualiseres i følgende skisse:



La $X(t)$ betegne antall kunder i køsystemet (inkludert den som eventuelt er under behandling) ved tidspunkt t. $X(t)$ blir da en fødsels- og dødsprosess med infinitesimale fødsels- og dødsrater gitt ved

$$\lambda_k = \lambda \ \text{ for } \ k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{og} \qquad \mu_k = \mu \cdot p \ \text{ for } \ k = 1, 2, \ldots.$$

a) Dersom $\lambda = 20$ (pr. time), hva er sannsynligheten for at maksimalt 5 (nye) kunder ankommer i løpet av den første halvtimen køsystemet opererer ?

Dersom $\lambda = 20$ (pr. time) og det er ankommet 5 (nye) kunder i løpet av den første halvtimen køsystemet har operert, hva er sannsynligheten for at maksimalt 10 kunder ankommer i løpet av den første timen av køsystemets operasjonstid.

Spesifiser køformelen (the queueing formula) som relaterer ankomstrate, forventet køtid og forventet antall i kø. Begrunn formelen med en figur og en kort forklaring.

b) Finn grensefordelingen for antall kunder i køsystemet. Identifiser spesielt hvilken betingelse λ, μ og p må oppfylle for at grensefordelingen skal eksistere. Hva skjer med køsystemet dersom denne betingelsen ikke er oppfylt ?

I resten av oppgaven skal vi anta at λ, μ og p er slik at det eksisterer en grensefordeling for antall kunder i kø.

c) I det lange løp, hva er gjennomsnittlig antall kunder i kø?

Benytt så køformelen til å finne gjennomsnittlig total tid hver kunde benytter i køsystemet (i det lange løp).

d) Regn så på nytt ut gjennomsnittlig total tid hver kunde benytter i køsystemet (i det lange løp), men nå <u>uten</u> å benytte køformelen.

Anta så at kunder som er ferdigbehandlet og skal gjennomgå ny behandling, i stedet for å stille seg bakerst i køen (som spesifisert over) får lov til å gå først i køen (dvs. starter umiddelbart ny behandling). Hvordan vil dette påvirke resultatene i punkt **c**) og **d**) ? (Begrunn svaret !)

Formelsamling:

Setningen om total sannsynlighet og dobbelforventning:

La $B_1, B_2, \ldots$ være parvis disjunkte hendelser med $\Pr\{\cup_{i=1}^{\infty} B_i\} = 1$. Da gjelder

$$\Pr\{A|C\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A|B_i \cap C\}\Pr\{B_i|C\}$$

$$\mathrm{E}[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}[X|B_i \cap C]\Pr\{B_i|C\}$$

Noen matematiske rekker:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad\qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \qquad\qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Markovkjeder i diskret tid:

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

$$P_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)}$$

Førstestegsanalyse:

La $g(i)$ være "kostnaden" i tilstand i, definert for alle transiente tilstander $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$. La T være absorpsjonstidspunktet for den absorberende tilstanden r, og la

$$w_i = \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} g(X_n)|X_0 = i\right].$$

Da har vi at

$$w_i = g(i) + \sum_{i=0}^{r-1} P_{ij} w_j \qquad \text{for} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, r-1.$$

Poisson-prosess:

W_n (tidspunkt for n-te hendelse) har sannsynlighetstetthet

$$f_{W_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Gitt at $X(t) = n$, så har $W_1, W_2, \ldots, W_n$ simultantetthet

$$f_{W_1,W_2,\ldots,W_n|X(t)}(w_1, w_2, \ldots, w_n|n) = \frac{n!}{t^n} \qquad \text{for} \quad 0 < w_1 < w_2 < \ldots < w_n \leq n.$$

Markovkjeder i kontinuerlig tid:

Forover Kolmogorov-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t),$$

og bakover Kolmogorov-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t),$$

med fødsels- og dødsrater $\lambda_i, \mu_i \geq 0$, samt $\lambda_{-1} = \mu_0 = 0$.

Grensefordeling i fødsels- og dødsprosesser:

Grensefordelingen i en fødsels- og dødsprosess med fødselsintensiteter $\lambda_k > 0$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ og dødsintensiteter $\mu_0 = 0$ og $\mu_k > 0$ for $k = 1, 2, \ldots$ er

$$\pi_k = \theta_k \pi_0 \qquad \text{for} \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad \text{og} \qquad \pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k}$$

der

$$\theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \qquad \text{for} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Differensialligning:

Differensialligningen

$$f'(t) + \alpha f(t) = g(t) \qquad \text{for} \quad t \geq 0$$

med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = a e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) \mathrm{d}s.$$