



Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG 75561 STOKASTISKE PROSESSER

Tirsdag 13. januar 1998

Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: K. Rottman: Mathematische Formelsammlung.
Barnett og Cronin: Mathematical Formulae.
Statistiske tabeller og formler, Tapir.
Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
Selvlaget gult titteark på A5-ark utdelt av foreleser.

Oppgave 1 Trekning av kuler fra urne

Betrakt en urne med totalt 4 kuler. Opprinnelig er tre av kulene røde, mens en er blå. Man trekker så tilfeldig en av de fire kulene og erstatter denne med en kule av motsatt farge, dvs. dersom en trekker en rød kule tar en denne ut av urne og legger i stedet en blå kule i urna, dersom en trekker en blå kule tar en denne ut av urna og legger i stedet en rød kule i urna. Slik holder en på inntil alle kulene i urna er av samme farge. La X_n betegne antall blå kuler i urna etter n -te trekning.

- a) Begrunn kort at $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ er en stasjonær Markov-kjede. Spesifiser utfallsrom og overgangsmatrise.
- b) Beregn sannsynligheten for at man ender opp med kun blå kuler i urna.

Oppgave 2 Bilkollektivet

Per er nylig ferdig med sine studier i Trondheim og ønsker å få tilgang på bil. Han får høre av en tidligere studiekamerat at det høsten 1996 ble startet et bilkollektiv i Trondheim. Per bestemmer seg for å regne på hvor godt dette vil fungere for ham.

Per forutsetter at han melder seg inn og at han vil ha samme bruksmønster av bilene som de øvrige medlemmene. Han får opplyst at kollektivet i så fall vil ha 12 medlemmer og at det vil disponere 2 biler. I kollektivet kan medlemmene reservere bil for en dag av gangen og betaler kr. 125 for hver dag de disponerer en bil.

Dersom mer enn to medlemmer ønsker bil en dag, er det følgende regel for hvem som faktisk får disponere bilene. Et medlem som ønsker bil og som disponerte bil også dagen før, får alltid ønsket innfridd. Hvem som får disponere de (eventuelt) gjenværende bilene, avgjøres med loddtrekning blant de øvrige som ønsker bil.

Per forhører seg med foretningsfører om hvordan bruksmønsteret er av bilene og gjør deretter følgende antagelser:

- medlemmene ønsker/ønsker ikke bil uavhengig av hverandre.
- et medlem som disponerer bil en dag, vil med sannsynlighet 0.5 ønske bil også påfølgende dag.
- et medlem som ikke disponerer bil en dag (enten fordi han ikke ønsker disponere bil eller fordi det ikke var bil ledig for ham), vil med sannsynlighet 0.06 ønske bil påfølgende dag.

Ut fra dette definerer Per Markov-kjeden $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ der

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis ingen medlemmer ønsker bil for dag nr } n, \\ 1 & \text{hvis nøyaktig ett medlem ønsker bil for dag nr } n, \\ 2 & \text{hvis nøyaktig to medlemmer ønsker bil for dag nr } n, \\ 3 & \text{hvis minst tre medlemmer ønsker bil for dag nr } n. \end{cases}$$

a) Regn ut overgangssannsynlighetene

$$\Pr\{X_{n+1} = 2 | X_n = 0\} \quad , \quad \Pr\{X_{n+1} = 0 | X_n = 2\} \quad \text{og} \quad \Pr\{X_{n+1} = 1 | X_n = 1\}.$$

Per regner ut hele overgangsmatrisen og finner denne til å bli

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0.476 & 0.365 & 0.128 & 0.031 \\ 0.253 & 0.431 & 0.234 & 0.082 \\ 0.135 & 0.307 & 0.331 & 0.227 \\ 0.135 & 0.307 & 0.331 & 0.227 \end{array} \right] \end{array}$$

Dessuten regner han ut tilhørende grensefordeling og finner at denne blir

$$\pi_0 = 0.2708, \quad \pi_1 = 0.3684, \quad \pi_2 = 0.2403, \quad \pi_3 = 0.1205.$$

- b) I det lange løp, hvor mye vil kollektivet totalt motta fra medlemmene for bruk av bilene i gjennomsnitt per dag?

I det lange løp, hvor stor andel av dagene vil Per disponere bil?

Gitt at Per ønsker å disponere bil en bestemt dag i en fjern fremtid, hva er sannsynligheten for at han får ønsket innfridd?

Under samtalen med foretningsfører får Per opplyst at det har vært litt misnøye blant medlemmene i bilkollektivet med at de ikke alltid får tilgang til bil når de ønsker det. Per blir fortalt at bilkollektivet derfor vurderer å inngå en avtale med et større bilutleiefirma i byen. I så fall vil bilutleiefirmaet stille biler til disposisjon for medlemmene i kollektivet de dagene mer enn to medlemmer ønsker bil, slik at medlemmene alltid er sikret tilgang på bil. Medlemmene vil for slike biler betale til bilkollektivet kr. 125 pr. dag på samme måte som for kollektivets egne biler. Men kollektivet må betale kr. 250 pr. bil leid fra bilutleiefirmaet for hver av de dagene ordningen benyttes. Foretningsfører forteller Per at de har vært litt redd for å gå inn på denne avtalen fordi de er redd det vil påføre kollektivet svært store utgifter. Per tilbyr seg å regne på dette for dem.

- c) I det lange løp, hva blir gjennomsnittlig nettoinntekt til bilkollektivet pr. dag dersom de inngår avtalen med bilutleiefirmaet?

Oppgave 3 Utålmodige kunder på postkontoret

Kari arbeider på et lite postkontor. I forbindelse med rasjonalisering i postverket, ble nylig antall ansatte ved dette postkontoret redusert. Som en følge av dette er det nå kun en luke som er betjent, mot tidligere to. Dette har ført til lange køer ved postkontoret og Kari har lagt merke til at mange kunder snur i døra når de ser den lange køen. Kari bestemmer seg for å regne litt på situasjonen. Hun antar at potensielle kunder ankommer ifølge en stasjonær Poisson-prosess med intensitet $\lambda = 45$ (time⁻¹) og at behandlingstider for kundene er uavhengige og

eksponensialfordelte med parameter $\mu = 20$ (time⁻¹). Videre antar hun at dersom en potensiell kunde ankommer når det allerede er k kunder i lokalet vil denne snu i døra med sannsynlighet

$$\frac{k}{4+k}.$$

Kari lar $X(t)$ betegne antall kunder i lokalet ved tidspunkt t .

- a) Diskuter kort de antagelser Kari har gjort. Er det noen av antagelsene som virker urealistiske? Foreslå eventuelt modifiserte antagelser.

Med de antagelser Kari har gjort, begrunn at $X(t)$ blir en fødsels- og dødsprosess og at fødsels- og dødsintensitetene er gitt ved

$$\lambda_k = \lambda \cdot \frac{4}{4+k} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_k = \mu \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

og $\mu_0 = 0$.

I de resterende to punkter skal du ta utgangspunkt i Karis antagelser.

- b) Etter at systemet har nådd likevekt, vis at sannsynlighetsfordelingen for antall kunder i postlokalet blir

$$\pi_k = 0.0905 \cdot \frac{9^k}{(3+k)!} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots$$

[Hint: Vis at for alle heltall $a \geq 1$ og for ethvert reelt tall $b > 0$ har man at

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{(a+k)!} = \left(e^b - \sum_{k=0}^{a-1} \frac{b^k}{k!} \right) / b^a$$

og benytt dette i utregningene. Merk dessuten at generelle formler for grensefordeling i en fødsels- og dødsprosess er inkludert i vedlagte formelsamling, på side 6 i oppgavesettet.]

Hva blir forventet antall kunder i lokalet etter at systemet har nådd likevekt?

- c) Etter at systemet har nådd likevekt, hvor stor andel av de potensielle kundene vil velge ikke å snu i døra?

Bruk så “køformelen” til å beregne forventet tid en kunde (som velger ikke å snu i døra) totalt vil bruke i postlokalet.

Formelsamling:

Setningen om total sannsynlighet og dobbelforventning:

La $B_1, B_2, \dots$ være parvis disjunkte hendelser med $\Pr\{\cup_{i=1}^{\infty} B_i\} = 1$. Da gjelder

$$\Pr\{A|C\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A|B_i \cap C\} \Pr\{B_i|C\}$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C] \Pr\{B_i|C\}$$

Noen matematiske rekker:

$$\sum_{k=1}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \qquad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1 - a)^2}$$

Markovkjeder i diskret tid:

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_k P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

$$P_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)}$$

Førstestegsanalyse:

La $g(i)$ være “kostnaden” i tilstand i , definert for alle transiente tilstander $i \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$.

La T være absorpsjonstidspunktet for den absorberende tilstanden r , og la

$$w_i = E \left[\sum_{n=0}^{T-1} g(X_n) | X_0 = i \right].$$

Da har vi at

$$w_i = g(i) + \sum_{j=0}^{r-1} P_{ij} w_j \qquad \text{for } i = 0, 1, 2, \dots, r-1.$$

Poisson-prosess:

W_n (tidspunkt for n -te hendelse) har sannsynlighetstetthet

$$f_{W_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Gitt at $X(t) = n$, så har $W_1, W_2, \dots, W_n$ simultantetthet

$$f_{W_1, W_2, \dots, W_n | X(t)}(w_1, w_2, \dots, w_n | n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for } 0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n \leq n.$$

Markovkjeder i kontinuertlig tid:

Forover Kolmogorov-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t),$$

og bakover Kolmogorov-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t),$$

med fødsels- og dødsrater $\lambda_i, \mu_i \geq 0$, samt $\lambda_{-1} = \mu_0 = 0$.

Grensefordeling i fødsels- og dødsprosesser:

Grensefordelingen i en fødsels- og dødsprosess med fødselsintensiteter $\lambda_k > 0$ for $k = 0, 1, 2, \dots$ og dødsintensiteter $\mu_0 = 0$ og $\mu_k > 0$ for $k = 1, 2, \dots$ er

$$\pi_k = \theta_k \pi_0 \quad \text{for } k = 1, 2, \dots \quad \text{og} \quad \pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k}$$

der

$$\theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_k} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots$$

Differensialligning:

Differensialligningen

$$f'(t) + \alpha f(t) = g(t) \quad \text{for } t \geq 0$$

med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = ae^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) ds$$