Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG 75561 STOKASTISKE PROSESSER

Tirsdag 12. januar 1999
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: K. Rottman: Mathematische Formelsamlung.
Barnett og Cronin: Mathematical Formulae.
Statistiske tabeller og formler, Tapir.
Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
Selvlaget gult titteark på A5-ark utdelt av foreleser.

Oppgave 1 Paraplyproblemet

Herr Hansen spaserer hver dag frem og tilbake mellom sitt hjem og kontoret der han arbeider. For ikke å bli våt når det regner går han til innkjøp av tre paraplyer som han fordeler mellom sitt hjem og kontoret. Deretter bruker han paraplyene på sine spaserturer mellom hjem og kontor etter følgende regler: Dersom det ikke regner går han naturlig nok uten paraply. Dersom det regner og det finnes minst en paraply tilgjengelig der han er tar han med seg en paraply. Derimot, dersom det regner og ingen av de tre paraplyene er der han er, går han uten paraply og blir våt. [Vil skal i denne oppgaven se bort fra muligheten av at det kan begynne å regne mens herr Hansen er på vei mellom hjem og kontor.]

Sønnen til Herr Hansen, Hansen junior, vil analysere situasjonen. Han lar $n = 0, 1, 2, \ldots$ telle antall spaserturer herr Hansen har gjort og lar X_n være antall paraplyer tilgjengelig der herr Hansen befinner seg etter den n-te spaserturen. Hansen junior sier at $\{X_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ er en Markov-kjede med utfallsrom $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ og overgangsmatrise

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \;\;0\;\; & \;\;1\;\; & \;\;2\;\; & \;\;3\;\; \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 1-p & p & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

der $p \in (0,1)$ betegner sannsynligheten for regn.

a) Hvilke(n) antagelse(r) har Hansen junior gjort når han sier at $\{X_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ er en Markov-kjede ? (I tillegg til de som er spesifisert over.)

Finn følgende sannsynligheter uttrykt ved p:

$$\Pr\{X_4 = 0 | X_0 = 0\} \quad \text{og} \quad f_{00}^4 = \Pr\{X_4 = 0 | X_0 = 0, X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, X_3 \neq 0\}$$

b) Finn grensefordelingen for X_n uttrykt ved p.

La $h(p)$ betegne andelen av turer, i det lange løp, der herr Hansen må vandre i regn uten paraply. Begrunn at $h(p) = p \cdot \pi_0$.

Hva er det minst gunstige klimaet for herr Hansen, dvs. for hvilken verdi av p vil han i det lange løp hyppigst måtte vandre i regnvær uten paraply?

Oppgave 2

En stasjonær Markov-kjede på tilstandsrommet $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ har følgende overgangsmatrise

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Bestem ekvivalensklassene for denne overgangsmatrisen.

Bestem perioden for hver tilstand.

Bestem $\lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = i | X_0 = 0\}$ for $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Oppgave 3 M/M/1-kø

Kunder ankommer et lite postkontor ifølge en stasjonær Poisson-prosess med intensitet $\lambda = 20$ (pr. time). Postkontoret har kun en luke og alle ankommende kunder stiller seg pent i kø og venter på sin tur. Behandlingstider for kundene er uavhengige og eksponensialfordelt med parameter $\mu = 30$ (pr. time). La $X(t)$ betegne antall kunder i postlokalet ved tid t.

a) Forklar betegnelsen $M/M/1$ for køsystemet beskrevet over.

Bestem sannsynligheten for at ingen kunder ankommer i løpet av en 15 minutters periode.

b) Fra de generelle formler for grensefordeling i en fødsels- og døds-prosess, finn grensefordelingen for $X(t)$. (Gi svaret som funksjon av λ og μ.)

I det lange løp, hvor stor andel av kundene vil ankomme når postfunksjonæren er ledig.

Utled gjennomsnittlig total tid hver kunde i det lange løp vil bruke på postkontoret.

Oppgave 4 Forsikringsselskapet

En enkel modell for innkommende pengestrøm til et forsikringsselskap er som følger; Innbetalinger skjer ved tidspunkter $W_1 < W_2 < W_3 < \dots$ som vi modellerer som hendelsestidspunktene i en stasjonær Poisson-prosess $\{X(t); t \geq 0\}$ med intensitet λ, dvs. $X(t)$ er antall innbetalinger opp til tid t. La Y_i betegne beløpet som innbetales ved i-te innbetaling og anta at $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ er uavhengige med samme sannsynlighetsfordeling der $\mathrm{E}[Y_i] = \mu$ og $\mathrm{Var}[Y_i] = \sigma^2$. Dessuten antar vi at de innbetalte beløp er uavhengig av tidspunktet for innbetalingene. Opp til tidspunkt t vil dermed totalt innbetalt beløp være

$$A(t) = \sum_{i=1}^{X(t)} Y_i.$$

a) Finn betinget forventning for $A(t)$, når det er gitt at $X(t) = n$.

Bruk så dette til å bestemme $\mathrm{E}[A(t)]$.

Forsikringsselskapet kan investere innbetalingene etterhvert som de ankommer og får da en avkastningsrate på β. En sum på y kroner er altså verdt $ye^{\beta s}$ etter tid s. Spesielt er verdien av Y_i som ankommer ved tid W_i oppjustert til $Y_i e^{\beta(t-W_i)}$ ved tid t. Selskapets samlede inntjening opp til tid t er altså

$$B(t) = \sum_{i=1}^{X(t)} Y_i e^{\beta(t-W_i)}.$$

b) Bestem forventet verdi av $B(t)$.

Oppgave 5 Tennisturnering

I denne oppgaven skal vi betrakte en tennisturnering mellom tre spillere, som vi kaller A, B og C. Turneringen består av en rekke av enkeltkamper. I hver enkeltkamp spiller to av spillerne mot hverandre. Vi skal forutsette at alle tre spillere er like gode, slik at i hver enkeltkamp har begge deltagerne sannsynlighet 0.5 for å vinne. I første enkeltkamp spiller A mot B. I andre enkeltkamp spiller C mot vinneren av første enkeltkamp. Deretter fortsetter en etter samme mønster, dvs i n-te enkeltkamp spiller spilleren som ikke deltok i enkeltkamp nr. $n-1$ mot vinneren av enkeltkamp nr. $n-1$. Turneringen avsluttes når samme spiller har vunnet to etterfølgende enkeltkamper og denne spilleren utropes til turneringsvinner. Slik reglene er utformet er det åpenbart at A og B, som deltar i første enkeltkamp, har en fordel i forhold til spiller C. Vi skal bestemme hvor stor denne fordelen er.

Definer en Markov kjede $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ som kan hjelpe deg til å analysere situasjonen.

Finn sannsynligheten for at spiller A blir turneringsvinner.

Formelsamling:

Setningen om total sannsynlighet og dobbelforventning:

La $B_1, B_2, \ldots$ være parvis disjunkte hendelser med $\Pr\{\cup_{i=1}^{\infty} B_i\} = 1$. Da gjelder

$$\Pr\{A|C\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A|B_i \cap C\}\Pr\{B_i|C\}$$

$$\mathrm{E}[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}[X|B_i \cap C]\Pr\{B_i|C\}$$

Noen matematiske rekker:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Markovkjeder i diskret tid:

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_k P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

$$P_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)}$$

Førstestegsanalyse:

La $g(i)$ være "kostnaden" i tilstand i, definert for alle transiente tilstander $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$. La T være absorpsjonstidspunktet for den absorberende tilstanden r, og la

$$w_i = \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} g(X_n)|X_0 = i\right].$$

Da har vi at

$$w_i = g(i) + \sum_{i=0}^{r-1} P_{ij} w_j \qquad \text{for} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, r-1.$$

Poisson-prosess:

W_n (tidspunkt for n-te hendelse) har sannsynlighetstetthet

$$f_{W_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Gitt at $X(t) = n$, så har $W_1, W_2, \ldots, W_n$ simultantetthet

$$f_{W_1,W_2,\ldots,W_n|X(t)}(w_1, w_2, \ldots, w_n|n) = \frac{n!}{t^n} \qquad \text{for} \quad 0 < w_1 < w_2 < \ldots < w_n \leq n.$$

Markovkjeder i kontinuerlig tid:

Forover Kolmogorov-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t),$$

og bakover Kolmogorov-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t),$$

med fødsels- og dødsrater $\lambda_i, \mu_i \geq 0$, samt $\lambda_{-1} = \mu_0 = 0$.

Grensefordeling i fødsels- og dødsprosesser:

Grensefordelingen i en fødsels- og dødsprosess med fødselsintensiteter $\lambda_k > 0$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ og dødsintensiteter $\mu_0 = 0$ og $\mu_k > 0$ for $k = 1, 2, \ldots$ er

$$\pi_k = \theta_k \pi_0 \qquad \text{for} \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad \text{og} \qquad \pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k}$$

der

$$\theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \qquad \text{for} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Differensialligning:

Differensialligningen

$$f'(t) + \alpha f(t) = g(t) \qquad \text{for} \quad t \geq 0$$

med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = a e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) \mathrm{d}s$$