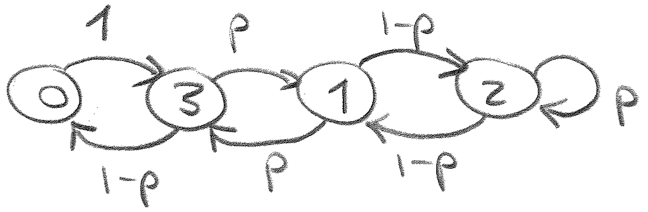
Oppg 1

Eksamen Januar 1999

a) En må anta at regn/ikke regn er uavhengig på de forskjellige turer.



$$\Pr\{X_4=0 \mid X_0=0\} = \Pr\{X_1=3, X_2=0, X_3=3, X_4=0 \mid X_0=0\}$$
$$+\Pr\{X_1=3, X_2=1, X_3=3, X_4=0 \mid X_0=0\}$$

$$= 1\cdot(1-p)\cdot 1\cdot(1-p) + 1\cdot p\cdot p\cdot(1-p)$$
$$=(1-p)^2 + p^2(1-p)$$
$$=\underline{(1-p)(1-p+p^2)} = \cancel{(1-p)^3}$$
$$= 1-2p+2p^2-p^3$$

$$f_{00}^{(4)} = \Pr\{X_1=3, X_2=p, X_3=3, X_4=0 \mid X_0=0\}$$

$$= 1\cdot p\cdot p\cdot(1-p) = \underline{p^2(1-p)}$$

← feil

svarer ikke på det som er spurt om i oppgaven!

$$\Pr\{X_4 = 0 \mid X_0 = 0,\ X_1 \neq 0,\ X_2 \neq 0,\ X_3 \neq 0\}$$

$$= \frac{\Pr\{X_1 \neq 0,\ X_2 \neq 0,\ X_3 \neq 0,\ X_4 = 0 \mid X_0 = 0\}}{\Pr\{X_1 \neq 0,\ X_2 \neq 0,\ X_3 \neq 0 \mid X_0 = 0\}}$$

$$= \frac{p^2(1-p)}{1 \cdot p} = \underline{\underline{p \cdot (1-p)}}$$

b) ~~Markov-kjeden er åpenbart irredusibel (alle tilstander kommuniserer) og aperiodisk~~ ~~($P_{22}>0$).~~ ~~Følgelig har den en entydig grensefordeling.~~

Grensefordeling:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= (1-p)\pi_3 \\
\pi_1 &= (1-p)\pi_2 + p\pi_3 \\
\pi_2 &= (1-p)\pi_1 + p\pi_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \pi_2 \\
\pi_3 &= \pi_0 + p\pi_1 \\
\pi_0 &+ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} \pi_1 = (1-p)\pi_2 + p\pi_3 \\ \pi_1 = \pi_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi_1 = \pi_3 = \pi_2$$

dvs.

$$(1-p)\pi_3 + \pi_3 + \pi_3 + \pi_3 = 1$$

$$\underline{\underline{\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{4-p}, \quad \pi_0 = \frac{1-p}{4-p}}}$$

Andel turer vandra i regn:

$$f(p) = \pi_0 \cdot p = \frac{p-p^2}{4-p}$$

$$f'(p) = \frac{(1-2p)(4-p) - p(1-p)\cdot(-1)}{(4-p)^2} = 0$$

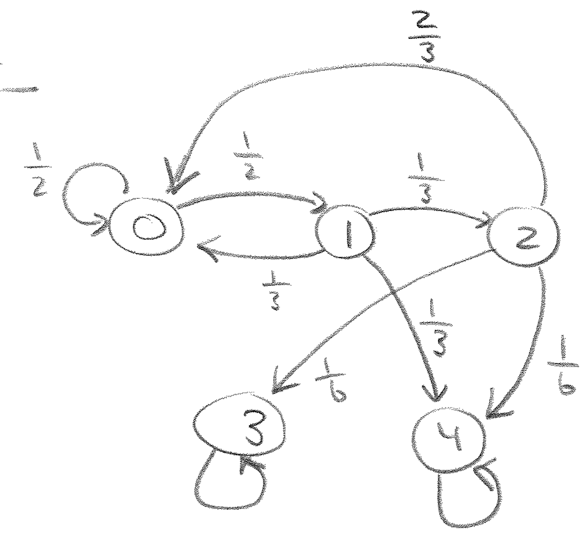
$$(1-2p)(4-p) + p(1-p) = 0$$

$$4 - p - 8p + 2p^2 + p - p^2 = 0$$

$$p^2 - 8p + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = +4 \pm \sqrt{4^2-4} = \begin{cases} 7.46 \\ 0.536 \end{cases}$$

dvs. $\underline{\underline{p = 0.536 \text{ er minst gunstig}}}$

Oppg. 2



Ser at $0 \to 1 \to 2 \to 0$

mens 3 kommuniserer med ingen unntatt seg selv

og 4 " " " " "

dvs. ekv. klassene blir $\{0,1,2\}, \{3\}$ og $\{4\}$

siden $P_{00} > 0 \Rightarrow d(0) = 1$

dvs. $\underline{d(0) = d(1) = d(2) = 1}$

$P_{33} > 0 \Rightarrow \underline{d(3) = 1}$

$P_{44} > 0 \Rightarrow \underline{d(4) = 1}$

åpenbart at

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = i \mid X_0 = 0\} = 0 \quad \text{for } i = 0,1,2.$$

Må benytte førstestegsanalyse for å bestemme verdier for $i = 3$ og 4.

La $T = \min\{n \geq 0 : X_n = 3 \text{ eller } X_n = 4\}$

$$\mu_i = \Pr\{X_T = 3 \mid X_0 = i\}$$

Får Ligningene:

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_1 \quad \Rightarrow \quad \mu_0 = \mu_1$$

$$\mu_1 = \frac{1}{3}\mu_0 + \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{1}{3}\mu_4$$

$$\mu_2 = \frac{2}{3}\mu_0 + \frac{1}{6}\mu_3 + \frac{1}{6}\mu_4$$

$$\mu_3 = 1$$

$$\mu_4 = 0$$

dvs.

$$\frac{2}{3}\mu_0 = \frac{1}{3}\mu_2 \quad \Rightarrow \quad \mu_0 = \frac{1}{2}\mu_2$$

$$\mu_2 = \frac{2}{3}\mu_0 + \frac{1}{6}$$

dvs.

$$2\mu_0 = \frac{2}{3}\mu_0 + \frac{1}{6} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2 - \frac{2}{3}}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}} = \underline{\frac{1}{8}}$$

dvs

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = 3 \mid X_0 = 0\} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = 4 \mid X_0 = 0\} = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$$

Løsningsforslag, Eksamen 75561 Stokastiske prosesser
Tirsdag 12.01.99

Oppg. 3

a) Første M-en spesifiserer ankomst prosessen. M for Poissonprosess som er „memoryless".

Andre M spesifiserer behandlingsprosessen. M for eksponensialfordelingen som er „memoryless".

1 står for antall behandlingsstasjoner.

$$\Pr\{Y(\tfrac{1}{4}) = 0\} = \frac{(\lambda \cdot \frac{1}{4})^0}{0!} e^{-\lambda \cdot \frac{1}{4}} = e^{-20 \cdot \frac{1}{4}} = \underline{\underline{0.0067}}$$

b) Vi har $\lambda_k = \lambda$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$\mu_k = \mu$, $k = 1, 2, \dots$

$$\Theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Theta_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

dvs $\Pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ og $\underline{\underline{\Pi_k = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Andel av kunder som finner postfunksjonæren ledig:

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{20}{30} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Total tid i kø: $T = \sum_{k=0}^{N} U_k$

der N: antall i kø ved ankomst
U_0: egen behandlingstid
U_i, $i = 1, \ldots, N$: behandlingstid for kunde nr. i.

oppløst: $E[T|N=n] = (n+1) \cdot \frac{1}{\mu}$

$$E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} E[T|N=n] \cdot Pr\{N=n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{\mu} \cdot \pi_n = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu} \cancel{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} \cdot \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\cancel{2}}} + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\lambda}{\mu - \lambda} + 1\right] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda + \mu - \lambda}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}} \text{ time, dvs. 6 minutter.}$$