Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 38

EKSAMEN I ST2101 STOKASTISK MODELLERING OG SIMULERING

Onsdag 1. juni 2005
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Ett gult ark (A5 med stempel) med egne formler og notater.

Sensur er ferdig: 22. juni 2005.

Oppgave 1

Tilstanden til en maskin kan ved ethvert tidspunkt t klassifiseres som

0: fungerer ok
1: fungerer delvis
2: fungerer ikke

La $X(t) \in \{0, 1, 2\}$ betegne maskinens tilstand ved tidspunkt t og anta at $\{X(t), t \geq 0\}$ er en kontinuerlig-tid markovprosess slik at

$$\mathrm{P}\{X(t+h) = j | X(t) = i\} = q_{ij}h + o(h) \quad \text{for } i \neq j.$$

Anta videre at overgangsintensitetene (pr. måned) er gitt som

$$q_{01} = 1 \ , \ q_{10} = 10 \ , \ q_{12} = 1 \ , \ q_{20} = 3 \text{ og } q_{21} = q_{02} = 0.$$

Overgangen fra tilstand 2 til tilstand 0 innebærer at maskinen byttes ut med en nyinnkjøpt maskin, mens overgangen fra tilstand 1 til tilstand 0 skjer ved at den gamle maskinen repareres.

a) Tegn et skjema over markovprosessen $\{X(t), t \geq 0\}$.

Gitt at maskinen fungerer ok ved tidspunkt 0, hva er sannsynligheten for at den vil fungere ok i hele intervallet $[0, 2]$?

Gitt at maskinen har fungert delvis i hele tidsintervallet $[0, 1]$, hva er sannsynligheten for at den fortsatt vil fungere delvis i hele intervallet $[1, 2]$?

b) En markovprosess kan som kjent formuleres (parameteriseres) på to mulige måter, hvorav den ene er benyttet i teksten over. Forklar den alternative måten å formulere en markovprosess på og angi parameterverdiene for denne parameteriseringen.

Ta utgangspunkt i modellformuleringen benyttet i oppgaveteksten over og finn ved presis regning (dvs. ved å benytte $o(h)$-notasjon)

$$P_{12} = \lim_{h \to 0} \mathrm{P}\{X(t+h) = 2 | X(t) = 1, X(t+h) \neq 1\}.$$

c) Skriv ned de av Kolmogorovs differensialligninger du trenger for å bestemme $\mathrm{P}_{00}(t)$, $\mathrm{P}_{01}(t)$ og $\mathrm{P}_{02}(t)$. [Du trenger ikke løse ligningene!]

Fra disse differensialligningene, utled et ligningssystem for grensefordelingen til $X(t)$. Vis at grensefordelingen blir

$$\pi_0 = \frac{33}{37}\ , \pi_1 = \frac{3}{37} \text{ og } \pi_2 = \frac{1}{37}.$$

Når maskinen fungerer ok bidrar den med en inntekt på kr. 100.000,- pr. måned, når den fungerer delvis reduseres denne inntekten til kr. 30.000,- pr. måned. Mens maskinen fungerer delvis påløper det dessuten reparasjonskostnader på kr. 5.000,- pr. måned. En maskin som ikke fungerer gir ingen inntekt. Innkjøp av en ny maskin koster kr. 500.000,-.

d) I det lange løp, hvor mange måneder går det i gjennomsnitt mellom hver gang en maskin byttes ut med en ny?

I det lange løp, hva blir forventet nettoinntekt fra maskinen pr. måned?

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven betrakte et køsystem med kun en behandlingsenhet. Kunder kan kun ankomme køsystemet eller være ferdigbehandlet i diskrete tidspunkter $n = 1, 2, \ldots$. Vi lar X_n betegne antall kunder i køsystemet (inkludert den som eventuelt er under behandling) ved tidspunkt n. Vi antar videre at køsystemet er tomt ved tidspunkt 0, dvs. $X_0 = 0$. Dermed har vi at $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ er en diskret-tid stokastisk prosess.

Vi skal anta at for hvert tidspunkt $n = 1, 2, \ldots$ er det en sannsynlighet $p \in (0, 1)$ for at en ny kunde ankommer køsystemet, mens med sannsynlighet $1 - p$ ankommer ingen ny kunde. Merk spesielt at det aldri kan ankomme mer enn en kunde på samme tidspunkt. Når en kunde ankommer går denne direkte til behandling dersom ingen andre er i køsystemet når han ankommer. Dersom det allerede er personer i køsystemet når han ankommer stiller han seg bakerst i køen og venter på tur. Vi skal anta at behandlingstiden for ulike kunder er uavhengige av hverandre (og uavhengig av ankomstprosessen) og at behandlingstiden er geometrisk fordelt med forventning $1/q$, der $q \in (0, 1)$. Dersom vil lar Z betegne behandlingstiden for en tilfeldig kunde har vi dermed at

$$\mathrm{P}\{Z = i\} = q(1 - q)^{i-1} \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

En behandlingstid vil altså alltid være minst en tidsenhet.

a) Benytt (1) til å vise at sannsynlighetsfordelingen for behandlingstidene er uten hukommelse, dvs. vis at

$$\mathrm{P}\{Z = i | Z > k\} = \mathrm{P}\{Z = i - k\} \quad \text{for} \quad i = k + 1, k + 2, \ldots.$$

b) Forklar hvorfor $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ blir en markovkjede. Vis/forklar at overgangssannsynlighetene for denne markovkjeden er

$$P_{0,0} = 1 - p \;\;,\;\; P_{0,1} = p \;\;,\;\; P_{i,i-1} = q(1 - p) \;\;,\;\; P_{i,i+1} = (1 - q)p \;\;\text{og}\;\; P_{i,i} = 1 - p - q + 2pq$$

for $i = 1, 2, \ldots$ og at alle de øvrige overgangssannsynlighetene er lik 0.

c) Kan du intuitivt innse et krav parameterverdiene p og q må oppfylle for at markovkjeden $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ skal ha en grensefordeling? Forklar også hva som vil skje når $n \to \infty$ dersom dette kravet ikke er oppfylt.

Forklar hvorfor X_n nødvendigvis må være tidsreversibel.

I resten av oppgaven skal vi forutsette at verdiene til p og q er slik at markovkjeden har en entydig grensefordeling og vi betegner (som vanlig) denne grensefordelingen ved $\pi_i, i = 0, 1, \ldots$.

d) Vis at grensefordelingen for X_n er

$$\pi_0 = 1 - \frac{p}{q} \quad \text{og} \quad \pi_i = \left(\frac{p(1-q)}{q(1-p)}\right)^i \frac{1}{1-q}\left(1 - \frac{p}{q}\right) \text{ for } i = 1, 2, \ldots$$

e) Finn gjennomsnittlig antall personer i køsystemet i det lange løp.

Finn også gjennomsittlig tid en person venter i kø (behandlingstiden ikke inkludert).

I det siste punktet i denne oppgaven skal vi ikke lenger forutsette at behandlingstidene er geometrisk fordelt. Vi skal fremdeles anta at de mulige verdier for behandlingstidene er $1, 2, \ldots$, men nå har de en vilkårlig punktsannsynlighet g med forventning og varians lik henholdvis ν og σ^2. Vi skal fremdeles forutsette at behandlingstidene er uavhengige av hverandre og uavhengig av ankomstprosessen.

f) Utled en kostidentitet som forbinder gjennomsnittlig gjenværende arbeid i køsystemet, V, og gjennomsnittlig tid en kunde er i kø, W_Q.

Hint: Benytt betalingsregelen at hver kunde betaler ved hvert (diskrete) tidspunkt y kroner, der y er gjenværende behandlingstid for denne kunden.

Utled også en annen sammenheng mellom V og W_Q.

Finn W_Q uttrykt ved p, ν og σ^2.

Formelsamling:

Setningene om total sannsynlighet og dobbelforventning

La $B_1, B_2, \ldots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$
$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For en irredusibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ og er gitt av ligningene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i, s_{ij},

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å returnere til tilstand j gitt start i tilstand i, f_{ij},

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n-te hendelse (n-te arrival time), S_n, har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \ldots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs forover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorovs bakover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Hvis $P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ eksisterer, er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Kø-teori

For gjennomsnittlig antall kunder i systemet, L, gjennomsnittlig tid pr. kunde i systemet, W, betjeningstid, S, og gjennomsnittlig gjenværende arbeid i systemet, V, gjelder

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_q = \lambda_a W_q.$$

$$V = \lambda_a E[S W_q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$