



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4265 Stokastiske prosesser

Løsningsforslag - Eksamen juni 2004

Oppgave 1

a)

Må kreve at Markov-kjeden er irreducibel, aperiodisk og positivt rekurrent, dvs. irreducibel og ergodisk.

Vi ser av overgangsmatrisen at følgende skjema over tilstander som kan nås fra andre tilstander kan settes opp:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 0$$

Av dette skjemaet ser vi at enhver tilstand kan nås fra en hvilken som helst annen tilstand. Dermed kommuniserer alle tilstandene, og Markov-kjeden er irreducibel. En Markov-kjede med et endelig tilstandsrom må ha minst en rekurrent tilstand, men siden Markov-kjeden er irreducibel, må alle tilstandene være rekurrente. Også, siden tilstandsrommet er endelig, må enhver rekurrent tilstand være positivt rekurrent. Fra overgangsmatrisen ser en at $P_{23} > 0$ og $P_{32} > 0$. Fra Chapman-Kolmogorov-ligningen følger at $P_{22}^2 \geq P_{23}P_{32} > 0$. På tilsvarende vis finner en at $P_{22}^3 \geq P_{23}P_{32}^2 \geq P_{23}P_{31}P_{12} > 0$. Største felles divisor for 2 og 3 er 1. Det medfører at største felles divisor for alle hele tall n slik at $P_{22}^n > 0$, også er 1. Det betyr at Markov-kjeden er aperiodisk. Dermed er alle krav oppfylt, og Markov-kjeden har en grensefordeling.

b)

Grensefordelingen $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_4)$ (betraktet som radvektor) tilfredsstiller ligningen

$$\pi \mathbf{P} = \pi$$

Utskrevet gir det

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\pi_4 &= \pi_0 \\ \pi_0 + \frac{3}{4}\pi_3 &= \pi_1 \\ \pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 &= \pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_4 &= \pi_3 \\ \frac{2}{3}\pi_2 &= \pi_4 \end{aligned}$$

I tillegg gjelder ligningen

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

Løsning av dette ligningssettet gir grensefordelingen

$$\pi = \frac{1}{127}(16, 31, 36, 20, 24)$$

c)

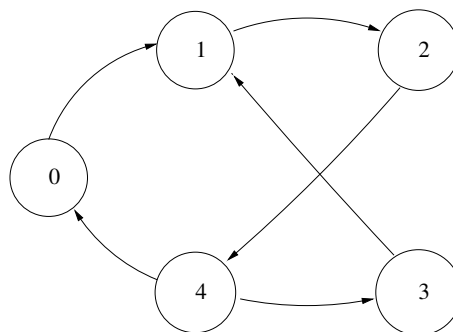


Figure 1: Diagram for Markov-kjeden. Pilene angir de positive overgangssannsynlighetene

Diagrammet i figur 1 viser at $P_{33}^n > 0$ bare for $n = 4m$, $m = 1, 2, \dots$. Det medfører at tilstanden 3 har periode 4. Skjemaet over tilgjengelige tilstander blir her

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 0$$

som viser at alle tilstander kommuniserer. Dermed er Markov-kjeden irreduksibel, og alle tilstander har periode 4. Markov-kjeden er dermed irreduksibel, positivt rekurrent og periodisk, og den har dermed ikke noen grensefordeling. Derimot har den en stasjonærfordeling $\tilde{\pi}$ som er den entydige løsningen av ligningene

$$\tilde{\pi}\mathbf{P} = \tilde{\pi}$$

og

$$\tilde{\pi}_0 + \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_3 + \tilde{\pi}_4 = 1$$

Løsningen blir

$$\tilde{\pi} = \frac{1}{12}(2, 3, 3, 1, 3)$$

Denne fordelingen blir å tolke som andelen av tiden prosessen tilbringer i de ulike tilstandene i det lange løp. Den stasjonære fordelingen har også den egenskapen at hvis en starter med denne fordelingen så vil fordelingen ved alle senere tidspunkter være lik den stasjonære.

Oppgave 2

a)

X_n er en Markov-kjede siden rottas vandring er en symmetrisk tilfeldig gang med absorberende endetilstander.

Overgangsmatrisen er

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har et typisk "Gambler's ruin" problem. Definerer $T = \min\{n \geq 0 : X_n = 1 \text{ eller } X_n = 6\}$ og $v_i = P[X_T = 6 | X_0 = i]$. Da er $v_1 = 0$ og $v_6 = 1$. Vi ønsker å bestemme v_4 . Førstestegsanalyse gir videre at

$$v_2 = \frac{1}{2}v_3, \quad (1)$$

$$v_3 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_4, \quad (2)$$

$$v_4 = \frac{1}{2}v_3 + \frac{1}{2}v_5, \quad (3)$$

$$v_5 = \frac{1}{2}v_4 + \frac{1}{2}, \quad (4)$$

Dette gir

$$(1) \Rightarrow v_3 = 2v_2,$$

$$(2) \Rightarrow v_4 = 2v_3 - v_2 = 3v_2,$$

$$(3) \Rightarrow v_5 = 2v_4 - v_3 = 4v_2,$$

som innsatt i (4) gir

$$4v_2 = \frac{1}{2} \cdot 3v_2 + \frac{1}{2} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{5}$$

Herav følger at

$$\underline{v_4 = \frac{3}{5}}$$

b)

I dette tilfellet er sannsynligheten p for å gå til høyre ukjent. En tilsvarende førstestegsanalyse som i punkt a) gir nå ($q = 1 - p$)

$$v_i = pv_{i+1} + qv_{i-1}, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

eller

$$v_{i+1} - v_i = \frac{q}{p}(v_i - v_{i-1}), \quad i = 2, 3, 4, 5$$

Siden $v_1 = 0$, gir det

$$v_{i+1} - v_i = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} v_2, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

Finner at

$$v_{i+1} = \left[1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right] v_2$$

Dvs.

$$v_{i+1} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} v_2, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

Siden $v_6 = 1$, får vi at

$$v_2 = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^5}$$

Dermed blir

$$v_4 = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^3}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^5}$$

Rottepopulasjonen deles i to grupper: Rottene i gruppe A fant mat, mens rottene i gruppe B fikk et elektrisk sjokk.

For gruppe A er $v_4 = 0.9$. Sett $x = q/p$. Det gir ligningen

$$x^3 = 0.1 + 0.9x^5$$

Siden åpenbart $q < p$, kan vi forsøke med en iterativ løsning hvor vi antar at $x^5 \ll x^3$. Vi setter da $x_{(n)} = (0.1 + 0.9x_{(n-1)}^5)^{1/3}$ for $n = 1, 2, \dots$. Setter $x_{(0)} = 0$. Det gir $x_{(1)} = (0.1)^{1/3} = 0.4642$, $x_{(2)} = 0.4924$, $x_{(3)} = 0.5052$, $x_{(4)} = 0.5061$, $x_{(5)} = 0.5064$, $x_{(6)} = 0.5066$, som er korrekt til fire desimaler. Det gir

$$\underline{p = 0.664}$$

for gruppe A.

Tilsvarende for gruppe B er $v_4 = 0.8$, og vi finner ligningen

$$x^3 = 0.2 + 0.8x^5$$

Det gir følgende iterative løsninger: $x_{(1)} = (0.2)^{1/3} = 0.5848$, $x_{(2)} = 0.6339$, $x_{(3)} = 0.6557$, $x_{(4)} = 0.6672$, $x_{(5)} = 0.6736$, $x_{(6)} = 0.6775$, $x_{(7)} = 0.6798$, $x_{(8)} = 0.6813$, $x_{(9)} = 0.6821$, $x_{(10)} = 0.6827$. Det gir

$$\underline{p = 0.594}$$

for gruppe B.

La M_j betegne hendelsen at rotta fant mat i forsøk nr. j ($j = 1, 2$). Ønsker å beregne $P(M_2 | \text{start i rom 4})$. Betingelser på situasjonen i første forsøk. Det gir

$$\begin{aligned} P(M_2 | \text{start i rom 4}) &= P(M_2 | \text{start i rom 4 og } M_1) \cdot P(M_1 | \text{start i rom 4}) \\ &\quad + P(M_2 | \text{start i rom 4 og } M_1') \cdot P(M_1' | \text{start i rom 4}) \end{aligned}$$

hvor komplementærhendelsen M_1' til M_1 tilsvarer at rotta fikk et elektrisk sjokk. Det gir

$$P(M_2 | \text{start i rom 4}) = 0.9 \cdot \frac{3}{5} + 0.8 \cdot \frac{2}{5} = \underline{0.86}$$

Oppgave 3

a)

$X(t)$ (med tilstandsrom $\{0, 1, 2, \dots\}$) for dette køsystemet blir åpenbart en fødsels- og dødsprosess siden $X(t)$ ved endring av tilstand enten går en opp eller en ned.

Fødselsratene blir $\underline{\lambda_i = \lambda}$ for $i = 0, 1, 2, \dots$. Dødsratene blir $\underline{\mu_0 = 0}$, $\underline{\mu_1 = \mu}$, $\underline{\mu_j = 2\mu}$ for $j = 2, 3, \dots$

b)

For å bestemme grensefordelingen, kan en sette opp balanseligningene eller benytte seg av den generelle formelen som gjelder for fødsels- og dødsprosesser. Ifølge den siste formelen, er grensefordelingen P_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ gitt ved $P_i = \theta_i P_0$, $i = 1, 2, \dots$, hvor

$$\theta_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} = \frac{\lambda^i}{\mu (2\mu)^{i-1}} = \frac{\lambda^i}{2^{i-1} \mu^i}$$

For å sikre at grensefordelingen eksisterer, må vi kreve at $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i < \infty$. Det betyr at vi må kreve at $\lambda < 2\mu$. Fra kravet $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$ finner vi at

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i} = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{i-1}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}}\right)^{-1}$$

Det gir

$$P_0 = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}$$

og

$$P_i = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{i-1} \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}$$

c)

Balanseligningene for A-systemet blir:

tilstand	ankomstrate = avgangstrate	
0	$\mu_A P_1 = (\lambda_A + \lambda_B) P_0$	(1)
1	$(\lambda_A + \lambda_B) P_0 + \mu_A P_2 = (\mu_A + \lambda_A) P_1$	(2)
$j \geq 2$	$\lambda_A P_{j-1} + \mu_A P_{j+1} = (\mu_A + \lambda_A) P_j$	(3)

Det gir $P_i = \theta_i P_0$, $i = 1, 2, \dots$, hvor

$$\theta_i = \frac{(\lambda_A + \lambda_B) \lambda_P^{i-1}}{\mu_A^i} = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{\mu_A} \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)^{i-1}$$

d)

For å sikre at grensefordelingen eksisterer, må vi igjen kreve at $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i < \infty$. Det medfører kravet $\lambda_A < \mu_A$.

Finner i dette tilfellet at

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i} = \left(1 + \frac{\lambda_A + \lambda_B}{\mu_A - \lambda_A}\right)^{-1} = \frac{\mu_A - \lambda_A}{\mu_A + \lambda_B}$$

som angir andelen av tiden systemet er tomt. Grensefordelingen er nå

$$P_i = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{\mu_A} \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)^{i-1} \cdot \frac{\mu_A - \lambda_A}{\mu_A + \lambda_B}, \quad i = 1, 2, \dots$$

e)

Har at

$$L_A = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

Innsatt uttrykkene for P_n gir

$$L_A = \frac{\mu_A - \lambda_A}{\mu_A + \lambda_B} \frac{\lambda_A + \lambda_B}{\mu_A} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A} \right)^{n-1} = \frac{\mu_A - \lambda_A}{\mu_A + \lambda_B} \frac{\lambda_A + \lambda_B}{\mu_A} \frac{\mu_A^2}{(\mu_A - \lambda_A)^2}$$

og vi ender opp med svaret

$$L_A = \frac{\mu_A(\lambda_A + \lambda_B)}{(\mu_A + \lambda_B)(\mu_A - \lambda_A)}$$

Av dette uttrykket ser vi at når $\lambda_A \rightarrow 0$, så vil

$$L_A \rightarrow \frac{\mu_A \lambda_B}{(\mu_A + \lambda_B)\mu_A} = \frac{\lambda_B}{\mu_A + \lambda_B}$$

Tilsvarende, når $\lambda_B \rightarrow 0$, får vi

$$L_A \rightarrow \frac{\mu_A \lambda_A}{\mu_A(\mu_A - \lambda_A)} = \frac{\lambda_A}{\mu_A - \lambda_A}$$

som tilsvarer et isolert A -system uten B -kunder.