



Faglig kontakt under eksamen:
Oddgeir Samset 73 59 35 27

Eksamen i fag SIF5072 Stokastisk modellering

Lørdag 20. mai 2000

Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler:

Karl Rottmann: Matematisk formelsamling.

Statistiske tabeller og formler, Tapir.

Et gult ark (A5 med stempel) med egne formler og notater.

Typegodkjent kalkulator med tomt minne.

Sensuren faller i uke 24.

Oppgave 1

En maskin blir jevnlig kontrollert og klassifisert i følgende 4 tilstander:

- 0 - ok
- 1 - noe slitt
- 2 - mye slitt
- 3 - defekt

La $n = 0, 1, 2, \dots$ være tidspunktene for kontroll av maskinen, og la X_n være tilstanden til maskinen i kontrollen ved tid n .

a) Under hvilke forutsetninger vil prosessen $X_0, X_1, X_2, \dots$ danne en Markov-kjede?

I det følgende antas disse forutsetningene oppfylt.

La overgangssannsynlighetene $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ være gitt ved overgangsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/4 & 1/10 & 1/20 \\ 0 & 3/5 & 3/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 7/10 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Tegn opp et skjema over prosessen.

Bestem klassen(e) for kjeden, og klassifiser tilstandene som transiente eller rekurente.

Finn $P(X_2 = 3 | X_0 = 0)$.

- c) For hver tilstand $i = 0, 1, 2$ finn forventet tid til maskinen er 'defekt' gitt at maskinen i utgangspunktet er i tilstand i .
- d) For hver tilstand $j = 0, 1, 2$ finn forventet tid maskinen er i tilstand j gitt at maskinen i utgangspunktet er 'ok'.

For denne Markov-kjeden, hvordan kan man kontrollere at man har beregnet disse forventede tidene riktig ved å benytte resultatet fra **c**)?

Man ønsker å undersøke følgende vedlikeholdsstrategi: Dersom maskinen blir funnet å være 'defekt' i en kontroll ved tid n blir de defekte komponenter umiddelbart identifisert og byttet ut med nye slik at maskinen kan klassifiseres som 'ok' igjen.

- e) Forklar kort hvorfor denne strategien medfører at siste rad i overgangsmatrisen $\mathbf{P}$ må erstattes med første rad mens alle de andre radene forblir som før.

Bestem klassen(e) for denne kjeden, og klassifiser tilstandene som transiente eller rekurrente. Hva er perioden til de ulike tilstandene?

I hvor stor andel av tiden vil maskinen være i de ulike tilstandene med denne vedlikeholdsstrategien?

Oppgave 2

Et taxi-selskap har b biler av samme type som benyttes i kundetransport.

Dersom en bil feiler blir denne tatt ut av drift slik at reparasjon kan starte umiddelbart. Etter at reparasjon er ferdig blir bilen umiddelbart satt i drift igjen.

Det antas at tiden fra en bil er ferdigreparert til den feiler igjen er eksponensialfordelt med parameter λ , og at reparasjonstidene er eksponensialfordelt med parameter μ . I tillegg antas det at bilene feiler og blir reparert uavhengig av hverandre.

La $N(t)$ for $t \geq 0$ være antallet av de b bilene som er under reparasjon ved tid t , og anta at $N(0) = 0$.

- a) Begrunn kort at $N(t)$ for $t \geq 0$ er en fødsels- og dødsprosess med utfallsrom $S = \{0, 1, 2, \dots, b\}$ og intensiteter

$$\begin{aligned}\lambda_i &= (b - i)\lambda \\ \mu_i &= i\mu\end{aligned}$$

for $i = 0, 1, 2, \dots, b$.

La T være tidspunktet da den første bilen feiler.

Hva er sannsynlighetstettheten for T ?

- b) I det lange løp, hvor stor andel av tiden vil alle bilene samtidig være i drift?

Vi ønsker å finne sannsynligheten for at én bestemt bil fungerer ved tid t gitt at den fungerte ved tid $t = 0$. La

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dersom bilen fungerer ved tid } t \\ 1 & \text{dersom bilen er i reparasjon ved tid } t \end{cases}$$

c) Vis at den ønskede sannsynligheten $P_{00}(t) = P(X(t) = 0 | X(0) = 0)$ er gitt ved

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

Hva er sannsynligheten $P_{01}(t)$?

Hva er stasjonærfordelingen til prosessen $X(t)$?

Oppgave 3

a) Forklar kort hva som legges i begrepet *Monte-Carlo simulering* og hvorfor slik simulering er nyttig i mange sammenhenger.

Vis hvordan man kan benytte *inversjons-metoden* til å simulere en stokastisk variabel Z som er eksponensialfordelt med parameter λ .

Hvordan kan dette benyttes for å simulere en stokastisk variabel X som er gammafordelt med parametre n og λ hvor $n > 1$ er et heltall?

I det etterfølgende ønsker vi å simulere en stokastisk variabel X fra en bestemt fordeling $f(x)$ ved å benytte *rejection-metoden*.

b) Gjør rede for hvordan man simulerer en stokastisk variabel X vha *rejection-metoden*, og vis at en stokastisk variabel X simulert med denne metoden virkelig kommer fra fordelingen $f(x)$.

c) For å simulere en stokastisk variabel X som er gammafordelt med parametre n og λ skal vi nå benytte *rejection-metoden*. Ta utgangspunkt i at man lett kan simulere fra en eksponensialfordeling med parameter λ/n , og vis at man med denne metoden kan komme frem til følgende algoritme:

1. Generer Y_1 og Y_2 uavhengig eksponensialfordelt med parameter 1.
2. Dersom $Y_1 \geq (n - 1)[Y_2 - \ln(Y_2) - 1]$ sett $X = nY_2/\lambda$, ellers returner til punkt 1.

Formelsamling:

Setningen om total sannsynlighet og dobbelforventning:

La $B_1, B_2, \dots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C)$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C)$$

Forventning for ikke-negative stokastiske variable:

Hvis X er diskret fordelt med mulige verdier $0, 1, 2, \dots$ er

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt med $P(X \leq 0) = 0$ er

$$E[X] = \int_0^{\infty} P(X > x) dx.$$

Markovkjeder i diskret tid:

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i , s_{ij}

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å returnere til tilstand j gitt start i tilstand i , f_{ij}

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poisson-prosess:

Ventetid til n -te hendelse (n -te arrival time), S_n , har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \dots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1, S_2, \dots, S_n | N(t)}(s_1, s_2, \dots, s_n | n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

Markovkjeder i kontinuerlig tid:

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorov's forover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorov's bakover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Grensefordeling i fødsels- og dødsprosesser:

Grensefordelingen i en fødsels- og dødsprosess med fødselsintensiteter $\lambda_k > 0$ for $k = 0, 1, 2, \dots$ og dødsintensiteter $\mu_0 = 0$ og $\mu_k > 0$ for $k = 1, 2, \dots$ er

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \dots$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \dots$$

Kø-teori:

For gjennomsnittlig antall kunder i systemet, L , gjennomsnittlig tid i systemet, W , gjennomsnittlig antall kunder som betjenes, Z , betjeningstid, S , og arbeid i systemet, V , gjelder:

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_q = \lambda_a W_q.$$

$$Z = \lambda_a E[S].$$

$$V = \lambda_a E[SW_q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$

Noen matematiske rekker:

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}; \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

Differensialligning:

Differensialligningen $f'(t) + \alpha f(t) = g(t)$ for $t \geq 0$ med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = ae^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) ds$$