**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Bo Lindqvist 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG SIF5072 STOKASTISKE PROSESSER

Tirsdag 22. mai 2001
Tid: 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler:
Tabeller og formler i statistikk (TAPIR).
Statistiske tabeller og formler (TAPIR).
Karl Rottmann: Matematisk formelsamling.
Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
Et gult ark (A5 med stempel fra instituttet) med egne formler og notater.

Sensur: 12. juni 2001

Oppgave 1 KREFTBEHANDLING

Ved behandling av kreft, for eksempel ved kjemoterapi, kan en oppnå at pasienten blir symptomfri uten at sykdommen er helbredet. Pasienten kan deretter få tilbakefall, på nytt bli symptomfri, osv. Pasienten kan også dø. Vi antar at livsforløpet til en pasient kan modelleres ved en Markov-kjede $\{X(t), t \geq 0\}$ med tilstandsrom bestående av

$$0 = \text{“symptomfri”},\ 1 = \text{“tilbakefall”},\ 2 = \text{“død”}$$

De positive overgangsratene (“instantaneous transition rates”) antas å være:

$$\begin{aligned} q_{01} &= \sigma \\ q_{02} &= \mu \\ q_{10} &= \rho \\ q_{12} &= \nu \end{aligned}$$

a) Tegn et skjema over prosessen.

Forklar kort med ord hva det innebærer at forløpet $X(t)$ modelleres ved en Markov-kjede.

Gitt at en pasient er symptomfri ved tidspunkt t, hva er sannsynligheten for at han er symptomfri i hele perioden fram til et tidspunkt $s > t$?

b) Med utgangspunkt i Chapman-Kolmogorov ligningene skal du vise hvordan Kolmogorovs forover-ligninger for henholdsvis $P'_{00}(t)$ og $P'_{01}(t)$ utledes.

Vis at ligningene kan skrives

$$P'_{00}(t) = \rho P_{01}(t) - (\mu + \sigma)P_{00}(t)$$
$$P'_{01}(t) = \sigma P_{00}(t) - (\nu + \rho)P_{01}(t)$$

c) Anta i dette punktet (og bare her) at $\rho = 0$, slik at en pasient ikke kan oppnå symptomfrihet på nytt når han først har fått tilbakefall. Betrakt en pasient som er symptomfri ved tid $t = 0$.

Bruk differensialligningene i forrige punkt til å finne sannsynligheten for at han fortsatt skal være symptomfri (og i live) t tidsenheter senere.

Finn også sannsynligheten for at han skal ha hatt tilbakefall (men fortsatt være i live) ved tid t.

d) Betrakt en pasient som er symptomfri ved tidspunkt $t = 0$. Bestem forventet gjenværende levetid for denne pasienten, dvs. $E(T|X(0) = 0)$ der $T = \min\{t : X(t) = 2\}$.

Vink: La $m_i \equiv E(T|X(0) = i)$ for $i = 0, 1$. Bruk at

$$m_i = \sum_{j \neq i} E(T|X(0) = i \,\cap\, \text{første overgang er til } j)P(\text{første overgang er til } j)$$

Oppgave 2 BENSINSTASJONEN

Ved en selvbetjeningsstasjon for bensin antas det at ankomsten av biler svarer til hendelsene i en Poisson-prosess $N(t)$ med parameter $\lambda > 0$ og med starttidspunkt $t = 0$. Vi lar $N(s, t] = N(t) - N(s)$ betegne antall ankomster i tidsintervallet $(s, t]$ for alle $0 \leq s < t$.

Det antas at alle biler som ankommer, umiddelbart finner en ledig pumpe. Dette gjøres i modellen ved å anta at bensinstasjonen har uendelig mange pumper, dvs. at vi har det læreboken kaller en "Infinite Server Queue".

La $Y(t)$ være antall opptatte pumper på tidspunkt $t \geq 0$.

I punktene a) og b) antas at alle biler bruker like lang tid, a minutter, ved bensinpumpene. Her er altså a en fast positiv konstant.

a) Forklar hvorfor $Y(t) = N(t-a, t]$ for alle $t \geq a$.

Sett opp sannsynlighetsfordelingen for $Y(t)$ for et gitt tidspunkt $t \geq a$.

Finn også sannsynlighetsfordelingen for $Y(t)$ for $0 < t < a$.

b) Finn, for alle $t > s > a$, sannsynligheten for at bensinstasjonen er tom for biler både ved tidspunkt s og ved tidspunkt t, dvs

$$P(Y(s) = 0 \cap Y(t) = 0).$$

I praksis vil det være urealistisk at betjeningstiden er en konstant a. Vi vil derfor i resten av oppgaven anta at betjeningstiden er en stokastisk variabel A med fordeling $P(A \leq a) = G(a)$ og endelig forventning m_A. Videre vil vi anta at betjeningstidene for ulike biler er stokastisk uavhengige og uavhengige av ankomstprosessen.

c) Bruk Little's formel til å finne det gjennomsnittlige antall biler på bensinstasjonen når systemet er i likevekt. Kontroller at svaret i punkt a) passer med dette resultatet.

Siden ankomstprosessen er en Poisson-prosess, er det mulig å regne ut den eksakte fordelingen for $Y(t)$. Dette skal gjøres i det neste punktet.

d) Vis at $Y(t)$ for alle $t \geq 0$ er Poisson-fordelt med parameter $\lambda \int_0^t (1 - G(s))ds$.

Kontroller at svaret er i samsvar med resultatet i forrige punkt.

Vink: Du kan for eksempel bruke at

$$P(Y(t) = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(Y(t) = k | N(t) = n) P(N(t) = n)$$

og anta som kjent at hvis $N(t) = n$ er gitt, vil de n ankomstene være uavhengige og uniformt fordelte på intervallet $(0, t]$. Dette leder til at $Y(t)$, gitt $N(t) = n$, er binomisk fordelt.

Oppgave 3 BROWNSK BEVEGELSE

La $\{B(t), t \geq 0\}$ være en standard Brownsk bevegelse ("Brownian motion"), dvs. at $\sigma = 1$.

a) Sett opp definisjonen av prosessen.

Finn $P(B(2) \geq 3)$.

Gitt at $B(1) = 1$, hva er sannsynligheten for at $B(2) \geq 3$?

b) La T_3 være første tidspunkt da prosessen når verdien 3.

Finn $P(T_3 \leq 2)$. Du skal her gjennomføre en utledning av resultatet. Det er altså ikke nok å sette inn i en formel fra læreboken.

Vink: Ta utgangspunkt i $P(B(2) \geq 3)$.

Formelsamling:

Setningen om total sannsynlighet og dobbelforventning:

La $B_1, B_2, \ldots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C)$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C)$$

Forventning for ikke-negative stokastiske variable:

Hvis X er diskret fordelt med mulige verdier $0, 1, 2, \ldots$ er

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt med $P(X \leq 0) = 0$ er

$$E[X] = \int_0^{\infty} P(X > x)\, dx.$$

Markovkjeder i diskret tid:

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i, s_{ij}

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å returnere til tilstand j gitt start i tilstand i, f_{ij}

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poisson-prosess:

Ventetid til n-te hendelse (n-te arrival time), S_n, har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \ldots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markovkjeder i kontinuerlig tid:

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Kolmogorov's forover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorov's bakover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Grensefordeling i fødsels- og dødsprosesser:

Grensefordelingen i en fødsels- og dødsprosess med fødselsintensiteter $\lambda_k > 0$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ og dødsintensiteter $\mu_0 = 0$ og $\mu_k > 0$ for $k = 1, 2, \ldots$ er

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Kø-teori:

For gjennomsnitlig antall kunder i systemet, L, gjennomsnitlig tid i systemet, W, gjennomsnitlig antall kunder som betjenes, Z, betjeningstid, S, og arbeid i systemet, V, gjelder:

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_q = \lambda_a W_q.$$

$$Z = \lambda_a E[S].$$

$$V = \lambda_a E[SW_q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$

Noen matematiske rekker:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}; \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

Differensialligning:

Differensialligningen $f'(t) + \alpha f(t) = g(t) \quad \text{for} \quad t \geq 0$ med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = ae^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s)\, ds$$