Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 38

EKSAMEN I EMNE SIF5072 STOKASTISKE PROSESSER

Torsdag 24.mai 2002
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Ett gult ark (A5 med stempel) med egne formler og notater.

Sensur: 14. juni 2002.

Oppgave 1

I brønner som bores i petroleumsreservoarer i Nordsjøen finnes ulike typer bergarter. Det er vanlig å ta prøver av berggrunnen (såkalte kjerneprøver) ved jevne mellomrom nedover langs brønnen. Vi skal i denne oppgaven betrakte et reservoar hvor det finnes tre bergartstyper; 0: Skifer, 1: Skifrig sandstein og 2: Ren sandstein. La $X_n \in \{0, 1, 2\}$ betegne bergartstypen ved prøveposisjon nummer n, der $n = 0$ er øverst i reservoaret og øker nedover. Vi skal her anta at $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ kan modelleres som en markovkjede med overgangsmatrise

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

a) Tegn opp et skjema over kjeden.

Bestem $\mathrm{P}\{X_2 = 2 | X_0 = 2\}$.

Bestem $\mathrm{P}\{X_1 \neq 2 \cap X_2 \neq 2 \cap X_3 \neq 2 \cap X_4 = 2 | X_0 = 2\}$.

b) Bestem ekvivalensklassene for kjeden, klassifiser hver tilstand som transient eller rekurrent, samt finn perioden til hver tilstand (Begrunn svarene!).

Begrunn at markovkjeden har en grensefordeling og bestem denne.

Skifer er tett og fungerer dermed som en barriere for flyt av olje og gass. Ren sandstein er porøs og har gode flytegenskaper. I skifrig sandstein er også flyt av olje og gass mulig, selv om flytegenskapene her er noe dårligere enn i ren sandstein. En viktig størrelse i vurderingen av et reservoar er derfor (vertikal) avstand mellom etterfølgende skiferbarrierer.

c) Bestem gjennomsnittlig tykkelse (i antall "tidssteg") av en sone med ren sandstein og skifrig sandstein mellom to skiferbarrierer.

I tillegg til gjennomsnittlig vertikal avstand mellom to skiferbarrierer er det av interesse også å bestemme sannsynligheten for at avstanden er større enn eller lik d (der d er et gitt antall "tidssteg"). Denne sannsynligheten er det ikke lett å finne ved analytisk regning, men den kan estimeres ved hjelp av simulering.

d) Ta utgangspunkt i at du har tilgjengelig en funksjon som genererer (vilkårlig mange) uavhengige uniformfordelte tall på intervallet $[0, 1]$ og skriv ned en algoritme som benytter dette til å simulere markovkjeden X_n.

Forklar hvordan den simulerte markovkjeden kan benyttes til å estimere den søkte sannsynlighet.

Oppgave 2

Tilstanden til en maskin kan ved ethvert tidspunkt t klassifiseres som

0: fungerer ok,
1: fungerer delvis,
2: ødelagt.

La $X(t)$ betegne tilstanden ved tidspunkt t og anta at $X(t)$ er en kontinuerlig-tid markovprosess slik at

$$\mathrm{P}\{X(t+h) = j | X(t) = i\} = q_{ij}h + o(h) \quad \text{for} \quad i \neq j.$$

a) En kontinuerlig-tid markovprosess kan som kjent formuleres (parameteriseres) på to mulige måter, hvorav den ene er benyttet i teksten over. Forklar den alternative formuleringen av en kontinuerlig-tid markovprosess og angi sammenhengen mellom de to formuleringene.

Anta nå at

$$q_{01} = \lambda \quad , \quad q_{12} = \sigma \quad \text{og} \quad q_{10} = \mu,$$

mens de øvrige overgangsratene q_{ij} alle er lik null. Maskinen kan dermed bli reparert mens den fungerer delvis, men vil ikke bli reparert etter at den er ødelagt. Dessuten kan maskinen bli ødelagt kun mens den fungerer delvis.

b) Ta utgangspunkt i modellformuleringen gitt i oppgaveteksten og finn ved presis regning (dvs. ved å benytte $o(h)$-notasjon)

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{P}\{X(t+h) = 0 | X(t) = 1 \cap X(t+h) \neq 1\}.$$

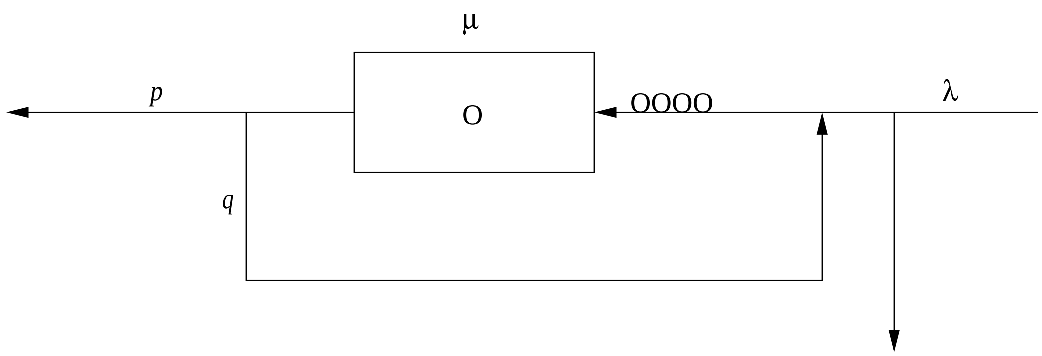
Svaret skal uttrykkes med (en eller flere av) λ, σ og μ.

c) La T være tidspunktet da maskinen går i stykker. Benytt setningen om dobbelforventning til å finne $\mathrm{E}[T | X(0) = 0]$ uttrykt ved (en eller flere av) λ, σ og μ.

Vink: Definer $v_i = \mathrm{E}[T | X(0) = i]$ og benytt setningen om dobbeltforventning til å utlede et ligningssystem for v_i.

Oppgave 3

Anta at potensielle kunder ankommer et køsystem ifølge en poissonprosess med intensitet $\lambda = 9$. Køsystemet har kun en behandlingsenhet og har endelig køkapasitet lik $N = 20$, dvs. potensielle kunder som ankommer når det allerede er N kunder i køsystemet går forbi og kommer ikke tilbake. Kundenes behandlingstider skal vi anta å være uavhengige og eksponensialfordelte med forventning $1/\mu$ der $\mu = 11$. Når en kunde er ferdigbehandlet skal vi anta at hun med sannsynlighet $p = 0.9$ (uavhengig av alt annet) forlater køsystemet, mens hun med sannsynlighet $q = 1 - p = 0.1$ vil trenge en ny behandling og i så fall går og stiller seg bakerst i køen. Hennes neste behandlingstid har i så fall samme fordeling som den første. Når hun er ferdig med neste behandling vil hun på nytt trenge nok en behandling med sannsynlighet q, osv. Køsystemet kan da visualiseres i følgende skisse.



La $X(t)$ betegne antall kunder i køsystemet ved tidspunkt t.

a) Begrunn kort at $X(t)$ blir en fødsels- og dødsprosess og begrunn at fødsels- og dødsintensitetene blir

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{for } k = 0, 1, \ldots, N-1, \\ 0 & \text{for } k = N \end{cases}$$

og

$$\mu_k = \begin{cases} p\mu & \text{for } k = 1, 2, \ldots, N, \\ 0 & \text{for } k = 0. \end{cases}$$

I punktene under skal alle svarene først gis uttrykt ved λ, μ, p og N. Deretter skal de oppgitte tallverdier settes inn og numerisk svar beregnes.

b) Bestem grensefordelingen for antall personer i køsystemet.

I det lange løp, hvor stor andel av de potensielle kundene går videre uten å bli behandlet?

I det lange løp, hvor stor andel av de potensielle kundene vil gå direkte til behandling (dvs. uten først å stå og vente i kø)?

c) Bestem gjennomsnittlig antall kunder i køsystemet.

Benytt så Littles formel til å bestemme gjennomsnittlig total tid hver kunde benytter i køsystemet. (Merk: Personene som går forbi uten å bli behandlet skal her ikke betraktes som kunder.)

Gitt at en kunde gjennomgår en (og kun en) behandling, finn forventet tid hun vil tilbringe i køsystemet.

Vink: I dette punktet kan du uten bevis benytte summeformelen

$$\sum_{i=0}^{n} i a^i = \frac{a + a^{n+1}(na - n - 1)}{(1-a)^2}.$$

Formelsamling:

Setningene om total sannsynlighet og dobbelforventning

La $B_1, B_2, \ldots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$
$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For en irredusibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ og er gitt av ligningene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i, s_{ij},

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å returnere til tilstand j gitt start i tilstand i, f_{ij},

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n-te hendelse (n-te arrival time), S_n, har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \ldots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs forover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorovs bakover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Hvis $P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ eksisterer, er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Kø-teori

For gjennomsnittlig antall kunder i systemet, L, gjennomsnittlig tid pr. kunde i systemet, W, betjeningstid, S, og gjennomsnittlig gjenværende arbeid i systemet, V, gjelder

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_q = \lambda_a W_q.$$

$$V = \lambda_a E[SW_q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$