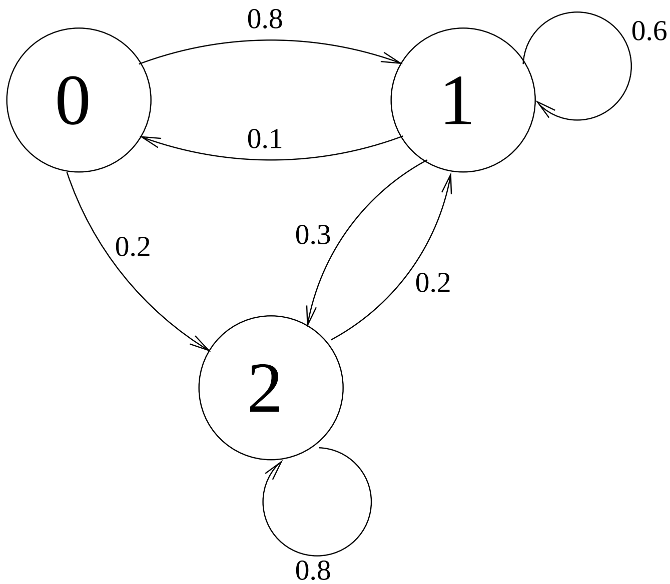
Oppgave 1

a)



Figur 1: Nodeskjema over markovkjeden

$$
\begin{aligned}
P\{X_2 = 2 | X_0 = 2\} &= P_{21} \cdot P_{12} + P_{22} \cdot P_{22} \\
&= 0.2 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.8 \\
&= \underline{\underline{0.7}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{X_1 \neq 2, X_2 \neq 2, X_3 \neq 2, X_4 = 2 | X_0 = 2\} &= P_{21}\big[P_{11} \cdot P_{11} \cdot P_{12} + P_{11} \cdot P_{10} \cdot P_{02} + P_{10} \cdot P_{01} \cdot P_{12}\big] \\
&= 0.2\big[0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.1 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.3\big] \\
&= 0.8\big[0.108 + 0.012 + 0.024\big] \\
&= \underline{\underline{0.0288}}
\end{aligned}
$$

b)

Dersom vi ser på overgangsmatrisen eller node-skjemaet, ser vi at alle tilstandene kommuniserer. Det vil altså si at alle tilstandene er i samme ekvivalensklasse ($0 \to 1 \to 2 \to 0$).

Siden vi har endelig mange tilstander, må minst en tilstand være rekurrent. Videre, siden vi kun har en ekvivalensklasse, må alle tilstandene være rekurrente.

Siden $P_{11} > 0$ må $d(1) = 1$. Vi har kun en ekvivalensklasse, så då må $d(0) = d(1) = d(2) = 1$.

Markovkjeden har en grensefordeling siden den er irredusibel (kun en ekvivalensklasse), positiv rekurrent (rekurrent og endelig antall tilstander) og aperiodisk.

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= 0.1\pi_1 && (1)\\
\pi_1 &= 0.8\pi_0 + 0.6\pi_1 + 0.2\pi_2 && (2)\\
\pi_2 &= 0.2\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.8\pi_2 && (3)\\
\pi_0 &+ \pi_1 + \pi_2 = 1 && (4)
\end{aligned}
$$

Løser vi (1) - (4), får vi

$$\underline{\underline{\pi_0 = 0.037, \pi_1 = 0.370, \pi_2 = 0.593}}$$

c)

La $T = min\{n > 0 : X_n = 0\}$

For å finne tykkelsen av en sone med ren/skifrig sandsten, må vi finne $E[T-1|X_0 = 0]$. Dette fordi $X_0 = 0$ definerer slutten på en skifersone, mens $X_T = 0$ definerer begynnelsen på en ny.

Vi har at $E[T-1|X_0 = 0] = E[T|X_0 = 0] - 1$, dermed trenger vi å regne ut $E[T|X_0 = 0]$.

$$
\begin{aligned}
E[T|X_0 = 0] &= E[T|X_0 = 0, X_1 = 1] \cdot P[X_1 = 1|X_0 = 0]\\
&+ E[T|X_0 = 0, X_1 = 2] \cdot P[X_1 = 2|X_0 = 0]\\
&= 0.8 \cdot (E[T|X_0 = 1] + 1) + 0.2 \cdot (E[T|X_0 = 2] + 1)\\
&= 0.8 \cdot \nu_1 + 0.2 \cdot \nu_2 + 1,
\end{aligned}
$$

der $\nu_i = E[T|X_0 = i]$. Vi har altså at

$$\nu_0 = 0.8 \cdot \nu_1 + 0.2 \cdot \nu_2 + 1. \qquad (5)$$

Tilsvarende utregninger for ν_1 og ν_2 gir oss følgende ligninger

$$
\begin{aligned}
\nu_1 &= 0.1 \cdot 1 + 0.6(1 + \nu_1) + 0.3(1 + \nu_2) = 1 + 0.6 \cdot \nu_1 + 0.3 \cdot \nu_2 && (6)\\
\nu_2 &= 0.2(1 + \nu_1) + 0.8(1 + \nu_2) = 1 + 0.2 \cdot \nu_1 + 0.8 \cdot \nu_2 && (7)
\end{aligned}
$$

Løser vi (6) og (7) får vi at

$$\nu_2 = 30$$

og

$$\nu_1 = 25.$$

Ved å sette ν_1 og ν_2 inn i (5) får vi

$$\nu_0 = E[T|X_0 = 0] = 1 + 0.8 \cdot 25 + 0.2 \cdot 30 = 27,$$

som betyr at tykkelsen er

$$\underline{\underline{E[T-1|X_0 = 0] = 27 - 1 = 26}}$$

d)

Algoritme:

- Sett initialverdi $X_0 = i_o$
- For $i = 1, 2, 3, ...$
  1. Trekk $u \sim U[0, 1]$
  2. Dersom $u < P_{X_{i-1},0}$ sett $X_i = 0$
  3. Dersom $P_{X_{i-1},0} \leq u < P_{X_{i-1},0} + P_{X_{i-1},1}$ sett $X_i = 1$
  4. Dersom $u \geq P_{X_{i-1},0} + P_{X_{i-1},1}$ sett $X_i = 2$

Fra realisasjonen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ finner man først tykkelsen til hvert av de simulerte lagene mellom skifer. Det vil si å finne $T_1, T_2, T_3, \ldots$. En realisasjon kan se f.eks. slik ut:

$$1\ 2\ 0\ \underbrace{1\ 1\ 2\ 2\ 0}_{T_1}\ \underbrace{2\ 1\ 0}_{T_2}\ \underbrace{2\ 2\ 1\ 0}_{T_3}\ \underbrace{1\ 2\ 1\ 0}_{T_4}\ \underbrace{2\ 1\ 2\ 2\ 0}_{T_5}\ \cdots$$

Et estimat av $P\{T-1 \geq d\}$ vil då være gitt som:

$$P\{\widehat{T-1 \geq} d\} = \underline{\underline{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I\{T_i - 1 \geq d\}}}, \tag{8}$$

der N er antall simulerte lag, og $I\{\cdot\}$ er indikatorfunksjonen.

En alternativ algoritme kan vere å starte mange simuleringer på $X_0 = 0$ og simulere kun fram til neste skifer (altså neste $X_i = 0$). Ved å ta vare på de T_i-ene man da får, kan man regne ut estimatet (8).

Oppgave 2

a)

Alternativ parametrisering av Markov-prosessen:

ν_i: parameter i eksponential-fordeling for tid fra ankomst til tilstand i til prosessen forlater tilstand i igjen.

P_{ij}: sannsynlighet for å gå fra tilstand i til tilstand j, gitt at tilstand i skal forlates.

Sammenheng:

$$\nu_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} \quad , \quad P_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_{j \neq i} q_{ij}} \quad , \quad q_{ij} = \nu_i P_{ij}$$

b)

$$\begin{aligned}
P_{10} &= \lim_{h \to 0} P\{X(t+h) = 0 \mid X(t) = 1, X(t+h) \neq 1\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{P\{X(t+h) = 0, X(t+h) \neq 1 \mid X(t) = 1\}}{P\{X(t+h) \neq 1 \mid X(t) = 1\}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{P\{X(t+h) = 0 \mid X(t) = 1\}}{P\{X(t+h) = 0 \mid X(t) = 1\} + P\{X(t+h) = 2 \mid X(t) = 1\}} \\
&= \frac{\mu h + o(h)}{\mu h + o(h) + \sigma h + o(h)} = \frac{\mu + \frac{o(h)}{h}}{\mu + \frac{o(h)}{h} + \sigma + \frac{o(h)}{h}} \xrightarrow[h \to 0]{} \underline{\underline{\frac{\mu}{\mu + \sigma}}}
\end{aligned}$$

c)

$$\nu_i = E\big[T \mid X(0) = i\big]$$

$$\begin{aligned}
\nu_2 &= 0 \\
\nu_1 &= \frac{1}{\mu+\sigma} + \frac{\mu}{\mu+\sigma}\nu_0 + \frac{\sigma}{\mu+\sigma}\nu_2 = \frac{1}{\mu+\sigma} + \frac{\mu}{\mu+\sigma}\nu_0 \quad (*) \\
\nu_0 &= \frac{1}{\lambda} + \nu_1 \quad (**)
\end{aligned}$$

Setter vi (*) inn i (**), får vi

$$\nu_0 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu+\sigma} + \frac{\mu}{\mu+\sigma}\nu_0,$$

som gir

$$\underline{\underline{\nu_0 = \frac{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu+\sigma}}{1 - \frac{\mu}{\mu+\sigma}}}}$$

Oppgave 3

a)

For $k \leq N-1$:	Potensielle nye kunder ankommer med intensitet λ, og enhver slik kunde vil gå inn i køsystemet. Det vil si at $\lambda_k = \lambda$.
For $k = N$:	Eventuelle potensielle nye kunder vil gå forbi, det vil si $\lambda_k = 0$.
For $k = 1, 2, \ldots, N$:	Kunden under behandling er ferdig med intensitet μ, men gitt at hun er ferdig vil hun kun forlate køsystemet med sannsynlighet p. Intensitet for å forlate køsystemet blir dermed $\mu_k = p\mu$.
For $k = 0$:	Ingen kunder i køsystemet, og dermed kan ingen forlate det. Det vil si at $\mu_0 = 0$.

$X(t)$ blir en fødsels- og dødsprosess fordi kunder forlater og ankommer køsystemetmed intensiteter som kun avhenger av nåværende tilstand, ikke historien.

b)

$$\theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_1 \ldots \mu_k} = \frac{\lambda^k}{(p\mu)^k} = \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{N} \theta_k = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}}{1 - \frac{\lambda}{p\mu}}$$

$$\underline{\underline{P_i = \frac{\theta_i}{\sum_{k=0}^{N} \theta_k} = \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^i \frac{1 - \frac{\lambda}{p\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}}}}$$

Her er $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $p = 0.9$ og $N = 20$, slik at

$$P_i = \left(\frac{9}{0.9 \cdot 11}\right)^i \frac{1 - \frac{9}{0.9 \cdot 11}}{1 - \left(\frac{9}{0.9 \cdot 11}\right)^{21}} = \underline{\underline{0.105 \big(0.909\big)^i}}$$

Andel kuner som går forbi:

$$P_N = \frac{\theta_i}{\sum_{k=0}^{N} \theta_k} = \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^i \frac{1 - \frac{\lambda}{p\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}} = \underline{\underline{0.0156}}$$

Andel kunder som går direkte til behandling:

$$P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{p\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}} = \underline{\underline{0.105}}$$

c)

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{i=0}^{N} iP_i = \sum_{i=0}^{N} i\left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^i \frac{1-\frac{\lambda}{p\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}} \\
&= \frac{1-\frac{\lambda}{p\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}} \cdot \frac{\frac{\lambda}{p\mu} + \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}\left(N\frac{\lambda}{p\mu} - N - 1\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{p\mu}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{p\mu} + \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}\left(N\frac{\lambda}{p\mu} - N - 1\right)}{\left(1-\left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}\right)\left(1-\frac{\lambda}{p\mu}\right)} = \underline{\underline{6.719}}
\end{aligned}
$$

Littles formel:

$$L = \lambda_a W \Rightarrow W = \frac{L}{\lambda_a}$$

Her er $\lambda_a = \lambda\big(1 - P_n\big)$, slik at gjennomsnittlig total tid hver kunde tilbringer i systemet blir:

$$W = \frac{L}{\lambda\big(1-P_n\big)} = \underline{\underline{0.756}}$$

La T være total tid i køsystemet for en person som gjennomgår (nøyaktig) en behandlig.

Betinger på N (antal kunder i køsystemet når "vår" person ankommer). N har sannsynlighetsfordeling

$$P\{N=n\} = \frac{P_n}{1-P_N}\ , n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

$$
\begin{aligned}
E[T] &= \sum_{n=0}^{N-1} E[T \mid N=n] \cdot P\{N=n\} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n+1}{\mu} P\{N=n\} = \frac{1}{\mu} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n}{\mu}\frac{P_n}{1-P_N} \\
&= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\sum_{n=0} N - 1n \frac{\left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{p\mu}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1} - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^N\left(1-\frac{\lambda}{p\mu}\right)} \\
&= \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{\left(1-\frac{\lambda}{p\mu}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1} - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^N\left(1-\frac{\lambda}{p\mu}\right)} \cdot \frac{\frac{\lambda}{p\mu} + \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^N\left((N-1)\frac{\lambda}{p\mu} - N - 2\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{p\mu}\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{\frac{\lambda}{p\mu} + \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^N\left((N-1)\frac{\lambda}{p\mu} - N - 2\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{p\mu}\right)\left(1-\left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1} - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^N\left(1-\frac{\lambda}{p\mu}\right)\right)}\right] = \underline{\underline{0.333}}
\end{aligned}
$$

$(*)$ fordi $E[T \mid N=n]$ er gammafordelt, med forventning $\frac{n+1}{\mu}$.