**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 38

EKSAMEN I EMNE SIF5072 STOKASTISKE PROSESSER

Mandag 12. mai 2003
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Ett gult ark (A5 med stempel) med egne formler og notater.

Sensur er ferdig: 2. juni 2003.

Oppgave 1

En maskin blir daglig kontrollert og dens tilstand blir hver gang klassifisert til en av følgende fire tilstander

0: ok,
1: noe redusert funksjonalitet,
2: sterkt redusert funksjonalitet,
3: defekt.

La $X_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ betegne maskinens tilstand på dag nummer n. Vi skal anta at X_n kan modelleres som en markovkjede med overgangsmatrise

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0.40 & 0.50 & 0.10 & 0 \\ 0.40 & 0 & 0.50 & 0.10 \\ 1.00 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at maskinen kun kan bli defekt etter at den først har hatt redusert funksjonalitet. Hvis maskinen er i tilstand 1 eller 2 iverksettes reparasjoner for å forsøke å reparere den, men som vi ser er det en sannsynlighet for at dette ikke lykkes. Hvis en maskin blir klassifisert som defekt, vil den neste dag bli erstattet av en ny maskin (som alltid er 'ok').

a) Tegn opp et skjema over kjeden.

Bestem sannsynlighetene

$$\mathrm{P}\{X_2 = 0 | X_0 = 0\} \quad \text{og} \quad \mathrm{P}\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_3 = 1\}.$$

b) Bestem forventet antall dager som går fra en ny maskin (som er 'ok') settes inn til denne maskinen klassifiseres som defekt.

c) Bestem markovkjedens ekvivalensklasser, klassifiser hver tilstand som transient eller rekurrent, samt bestem perioden til hver tilstand. (Begrunn svarene!)

Begrunn at markovkjeden har en grensefordeling og vis at denne blir

$$\pi_0 = 0.8913 \ \ , \ \ \pi_1 = 0.0891 \ \ , \ \ \pi_2 = 0.0178 \ \ , \ \ \pi_3 = 0.0018.$$

Hver dag maskinen er 'ok' vil den gi en inntekt på kr. 250,-. På dager maskinen er i tilstand 1 eller 2 gir den en inntekt på henholdsvis kr. 150,- og kr. 75,-. På dager maskinen er 'defekt' gir den ingen inntekt. Hver gang maskinen går fra tilstand 0 til 1 påløper det en utgift på kr. 500,- for å tilkalle reparatører. I tillegg til dette påløper det en utgift på kr. 100,- for hver dag maskinen er under reparasjon (dvs. for hver dag maskinen er i tilstand 1 eller 2). Å anskaffe en ny maskin koster kr. 2000,-.

d) I det lange løp, hva blir gjennomsnittlig bruttoinntekt fra maskinen pr. dag?

I det lange løp, hva blir gjennomsnittlig nettoinntekt fra maskinen pr. dag?

Oppgave 2

En poissonprosess $\{N(t); t \geq 0\}$ med intensitet λ har (som kjent) følgende to egenskaper

$$\text{(i)} \ \ \mathrm{P}\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h) \quad \text{og} \quad \text{(ii)} \ \ \mathrm{P}\{N(h) \geq 2\} = o(h).$$

La $\{N_A(t); t \geq 0\}$ og $\{N_B(t); t \geq 0\}$ være to uavhengige poissonprosesser med intensiteter lik henholdsvis λ_A og λ_B. La videre $N(t) = N_A(t) + N_B(t)$.

a) Vis ved presis regning (dvs. ved å benytte $o(h)$-notasjonen) at $N(t)$ oppfyller kravene (i) og (ii) med $\lambda = \lambda_A + \lambda_B$.

Benytt kjente egenskaper for poissonprosesser til å besvare følgende spørsmål når $\{N_A(t); t \geq 0\}$, $\{N_B(t); t \geq 0\}$ og $\{N(t); t \geq 0\}$ er som spesifisert over og $\lambda_A = 1$ og $\lambda_B = 2$.

b) Bestem sannsynlighetene

$$\mathrm{P}\{N(1) \leq 2\} \quad , \quad \mathrm{P}\{N_A(1) = 1 | N(1) = 1\} \quad \text{og} \quad \mathrm{P}\{N(1) \leq 2 | N_A(0.5) = 1\}.$$

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi betrakte et køsystem med kun en behandlingsenhet. To typer kunder ankommer køsystemet; type A-kunder og type B-kunder. Type A-kunder ankommer en om gangen ifølge en poissonprosess med intensitet $\lambda_A = \frac{1}{2}$. Type B-kunder ankommer i grupper på to personer og gruppene ankommer ifølge en Poissonprosess med intensitet $\lambda_B > 0$. Vi skal dessuten anta at de to poissonprosessene er uavhengige. Dersom behandlingsenheten er opptatt når en type A-kunde ankommer vil kunden alltid stille seg pent i kø for å vente på sin tur. Det er altså ingen begrensning på hvor mange type A-kunder som kan stå i kø. Type B-kunder derimot vil kun gå inn i køsystemet dersom behandlingsenheten er ledig når disse ankommer og i så fall vil en av de to type B-kundene gå direkte til behandling, mens den andre vil stille seg i kø. Dersom behandlingsenheten er opptatt når en gruppe av B-kunder ankommer vil altså disse kundene gå forbi uten å bli behandlet.

Vi skal anta at alle behandlingstider er uavhengige og eksponensialfordelte med parameter $\mu = 1$. Type A-kunder og type B-kunder har altså samme sannsynlighetsfordeling for sine behandlingstider.

La $X(t)$ betegne antall kunder i køsystemet ved tid t. $X(t)$ blir dermed en markovprosess.

Merk: I alle punktene i denne oppgaven skal du sette inn $\lambda_A = \frac{1}{2}$ og $\mu = 1$ og oppgi svarene som funksjon av λ_B.

a) Tegn opp et skjema over markovprosessen $X(t)$.

Skriv ned et ligningssystem som grensefordelingen til $X(t)$ må oppfylle.

Vis ved innsetting i dette ligningssystemet at grensefordelingen blir

$$P_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + 2\lambda_B} \quad , \quad P_1 = \frac{1}{4} \quad \text{og} \quad P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1 + 6\lambda_B}{1 + 2\lambda_B} \quad \text{for } n = 2, 3, \ldots.$$

b) Forklar med ord hva det vil si at en (kontinuerlig-tid) markovprosess er tidsreversibel.

Begrunn med ord eller vis matematisk at $X(t)$ **ikke** er tidsreversibel.

c) Vis at gjennomsnittlig antall kunder i køsystemet i det lange løp blir

$$\frac{1+5\lambda_B}{1+2\lambda_B}.$$

Benytt så Littles formel til å bestemme gjennomsnittlig tid hver kunde (som gjennomgår behandling) vil benytte i køsystemet.

La W_A betegne gjennomsnittlig tid en type A-kunde vil oppholde seg i køsystemet, og la W_B betegne gjennomsnittlig tid en type B-kunde (som gjennomgår behandling) vil oppholde seg i køsystemet.

d) Bestem W_A og W_B.

Formelsamling:

Setningene om total sannsynlighet og dobbelforventning

La $B_1, B_2, \dots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$
$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For en irredusibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ og er gitt av ligningene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i, s_{ij},

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å returnere til tilstand j gitt start i tilstand i, f_{ij},

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n-te hendelse (n-te arrival time), S_n, har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \dots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \dots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs forover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj}P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorovs bakover-ligninger

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Hvis $P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ eksisterer, er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k\neq j} q_{kj}P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Kø-teori

For gjennomsnittlig antall kunder i systemet, L, gjennomsnittlig tid pr. kunde i systemet, W, betjeningstid, S, og gjennomsnittlig gjenværende arbeid i systemet, V, gjelder

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_q = \lambda_a W_q.$$

$$V = \lambda_a E[SW_q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$