Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4265 Stokastiske prosesser
Våren 2004

Løsningsforslag - Øving 0

Oppgaver fra læreboka

$\boxed{1.3}$

N= Antall ganger en må kaste et kronestykke til en får H to ganger på rad.

a) Utfallsrommet:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (H,H),(T,H,H), \\ (T,T,H,H),(H,T,H,H) \\ (T,T,T,H,H),(H,T,T,H,H),(T,H,T,H,H) \\ (...,T,H,H),... \end{array} \right\}$$

b)

$$P(N=4) = P((T,T,H,H) \cup (H,T,H,H)) = P(T,T,H,H) + P(H,T,H,H)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

$\boxed{1.12}$

Utfører et forsøk inntil enten E eller F inntreffer.
E og F er disjunkte hendelser.

a) Utfallsrom:

$$S = \{E, F, (E \cup F)^c\}$$

b)

$$P(E \text{ inntreffer før } F) = P(E \mid E \cup F) = \frac{P(E \cap (E \cup F))}{P(E \cup F)} = \underline{\underline{\frac{P(E)}{P(E) + P(F)}}}$$

$$(E \cap F = \emptyset)$$

$\boxed{1.13}$

- X_i = Summen av to terninger i i'te kast.
- Betinger på det første kastet:

$$P(Vinne) = \sum_{k=2}^{12} P(Vinne \mid X_1 = k) \cdot P(X_1 = k)$$

$$\left(\begin{array}{c} P(Vinne \mid X_1 = k) = \begin{cases} 1 & k = 7, 11 \\ 0 & k = 2, 3, 12 \\ P(X_i = k \text{ } f\text{ø}r \text{ } X_i = 7) & k = 4, 5, 6, 8, 9, 10 \end{cases} \\ \\ P(X_i = k \text{ } f\text{ø}r \text{ } X_i = 7) = \frac{P(X_i=k)}{P(X_i=k)+P(X_i=7)} \end{array} \right)$$

- Dermed får vi at:

$$\begin{aligned} P(Vinne) &= 1 \cdot P(X_1 = 7, 11) + \sum_{k=4,5,6,8,9,10} \frac{P(X_i = k)^2}{P(X_i = k) + P(X_i = 7)} \\ &= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{(\frac{3}{36})^2}{\frac{3}{36} + \frac{6}{36}} + ... + \frac{(\frac{3}{36})^2}{\frac{3}{36} + \frac{6}{36}} \\ &= \underline{\underline{0.493}} \end{aligned}$$

1.18

- E_1 - Eldste er en jente
- E_2 - Minst en er jente
- P$(E_1) = \frac{1}{2}$
- P$(E_2) = \frac{3}{4}$

Yngst	*eldst*
g	g
j	j
g	j
j	g

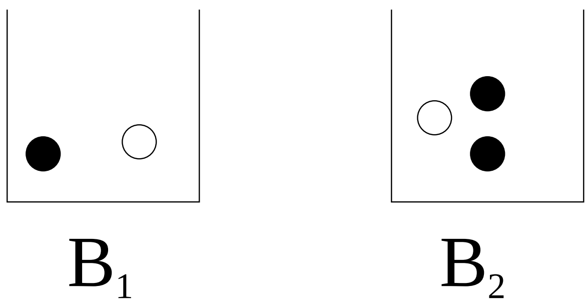
a)

$$P((j,j) \mid E_1) = \frac{P((j,j) \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P((j,j))}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b)

$$P((j,j) \mid E_2) = \frac{P((j,j) \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P((j,j))}{P(E_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$\boxed{\text{1.36}}$



Figur 1:

- B_i - Velger boks nr. i, i=1,2
- S - Sort kule

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(S \mid B_2) \cdot P(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \underline{\underline{\frac{7}{12}}} \end{aligned}$$

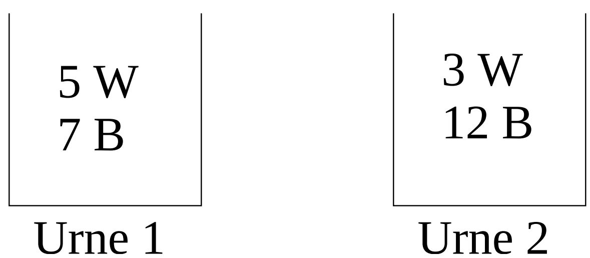
$\boxed{\text{1.39}}$

Butikk	A	B	C
Ansatte	50	75	100
Kvinneandel	50 prosent	60 prosent	70 prosent

- K = Kvinne
- O = Sier opp jobben

$$
\begin{aligned}
P(C \mid K \cap O) &= \frac{P(C \cap K \cap O)}{P(K \cap O)} \\
&= \frac{P(O \mid C \cap K) \cdot P(K \mid C) \cdot P(C)}{P(O \mid K) \cdot P(K)} \\
&= \frac{P(O) \cdot P(K \mid C) \cdot P(C)}{P(O) \cdot P(K)} \\
&= \frac{P(K \mid C) \cdot P(C)}{P(K \mid C) \cdot P(C) + P(K \mid B) \cdot P(B) + P(K \mid A) \cdot P(A)} \\
&= \frac{0.7 \cdot \frac{100}{225}}{0.5 \cdot \frac{50}{225} + 0.6 \cdot \frac{75}{225} + 0.7 \cdot \frac{100}{225}} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{1.44}$



Figur 2:

- H - Head $\Rightarrow$ Urne 1
- T - Tail $\Rightarrow$ Urne 2
- W - Hvit ball
- B - Svart ball

$$\begin{aligned}
P(T \mid W) &= \frac{P(W \mid T) \cdot P(T)}{P(W \mid T) \cdot P(T) + P(W \mid H) \cdot P(H)} \\
&= \frac{\frac{3}{15} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2}} \\
&= \frac{24}{74} \\
&= \underline{\underline{0.324}}
\end{aligned}$$

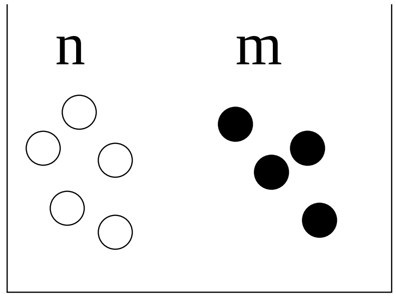
$\boxed{2.12}$

- P(Gjetter riktig på spørsmål nr. i) = $\frac{1}{3}$
- Hvert gjett antas uavhengig
- Enten rett eller galt
  $\Rightarrow$ X$\sim$ bin(5, $\frac{1}{3}$)
- X = Antall spørsmål som besvares riktig

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= \sum_{k=4}^{5} \binom{5}{k} \cdot (\frac{2}{3})^{5-k} \cdot (\frac{1}{3})^{k} \\
&= 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{3})^{4} + 1 \cdot (\frac{1}{3})^{5} \\
&= \underline{\underline{0.0453}}
\end{aligned}$$

$\boxed{2.43}$

- X = Antall røde baller som fjernes før sort ball opptrer



Figur 3:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Rød ball nr i tas før en sort ball} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a)

$$\underline{\underline{X = \sum_{i=1}^{n} X_i}}$$

b)

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n \cdot E[X_1]$$

$$E[X_i] = 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{m+1}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{E[X] = \frac{n}{m+1}}}$$

(Hvor mange baller en trekker før nr. i spiller ingen rolle.)

$\boxed{2.64}$

- Se fasit s. 628

$\rightarrow$ Bruk momentgenererende funksjon :

$$M_{\sum_i X_i}(t) = (M_{X_i}(t))^n$$

nårX_i er i.i.d.

$\boxed{2.74}$

- X_1, X_2,... u.i.f tilfeldige variable

$$Y_n = \begin{cases} 1 & X_n \ er \ en \ rekord \ dvs \ X_n > maks(X_1, ..., X_{n-1}) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

i) Siden X_i'ene er uavh. og identisk fordelte, er det like stor sannsynlighet for at hver av dem skal være den største:

$$\underline{\underline{P(Y_n = 1) = \frac{1}{n}}}$$

ii) Y = $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ = Antall rekorder ved tid n

$$E[Y] = E[\sum_{i=1}^{n} Y_i] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i] = \sum_{i=1}^{n} P(Y_i = 1) = \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}}$$

iii)

$$\begin{aligned} Var[Y] &= Var[\sum Y_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var[Y_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (E[Y_i^2] - E[Y_i]^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i} - (\frac{1}{i})^2) \\ &= \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{i^2}}} \end{aligned}$$

Overgang nr. 2 gjør bruk av at Y_i'ene er uavhengige.
iv)

- N=min{n:n> 1 og rekord ved tid n}

$$
\begin{aligned}
P(N > K) &= P(Ingen\ rekord\ opp\ t.o.m.\ tid\ k) \\
&= \prod_{i=2}^{k}(1 - \frac{1}{i}) \\
&= \prod_{i=2}^{k}(\frac{i-1}{i}) \\
&= \frac{2-1}{2} \cdot \frac{3-1}{3} \cdot ... \cdot \frac{k-1}{k} \\
&= \frac{(k-1)!}{k!} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{k}}}\ ,\ k \geq 2
\end{aligned}
$$

For positive diskret variable gjelder at (*)

$$
\begin{aligned}
E[N] &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(N > k) \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{\infty} P(N > k) \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \\
&= \underline{\underline{\infty}}
\end{aligned}
$$