Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 1

Oppgaver fra læreboka

3.3

Har at

$$\begin{aligned}
E[X \mid Y=1] &= \sum_{k=1}^{3} kP(X=k|Y=1) \\
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{P(X=k, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1}{P(Y=1)} \sum_{k=1}^{3} kp(k,1) \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{3} kp(k,1)}{\sum_{k=1}^{3} p(k,1)} = \frac{1\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = \underline{\underline{2}} \\
E[X \mid Y=2] &= \underline{\underline{\frac{5}{3}}} \\
E[X \mid Y=3] &= \underline{\underline{\frac{12}{5}}}
\end{aligned}$$

3.8

- X - antall terningkast for å få en 6'er
- Y - antall treningkast for å få en 5'er
- Har at:

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \frac{1}{6} = p \\
P(X=2) &= p(1-p) \\
P(X=3) &= p(1-p)^2 \\
&\vdots \\
P(X=k) &= (1-p)^{k-1}p
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Geometrisk fordeling: $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p}$

a)

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{6}}$$

b) Intuitivt: $E[X \mid Y = 1] = E[1 + X] = 1 + E[X] = \underline{\underline{7}}$
Via fordeling:

$$\begin{aligned} p(1,1) &= 0 \\ p(2,1) &= \frac{1}{6} = p \\ p(3,1) &= (1-p)p \\ &\vdots \\ p(k,1) &= (1-p)^{k-2}p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E[X \mid Y = 1] &= \sum_{k=2}^{\infty} k'(1-p)^{k'-2}p \ , \qquad k' = k+1 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(1-p)^{k-1}p \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}p + \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p \\ &= 1 + E[X] = \underline{\underline{7}} \end{aligned}$$

c) Via fordeling:

$$\begin{aligned} p(1 \mid 5) &= \frac{1}{5} \\ p(2 \mid 5) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \\ &\vdots \\ p(4 \mid 5) &= \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} \\ p(5 \mid 5) &= 0 \\ p(6 \mid 5) &= \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \\ &\vdots \\ p(k \mid 5) &= \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot (1-p)^{k-6} \cdot p \end{aligned}$$

Vi får at

$$\begin{aligned}
E[X \mid Y=5] &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(k \mid 5) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \\
&\quad + \left(\frac{4}{5}\right)^4 \sum_{k=6}^{\infty} k(1-p)^{k-6} p \\
\sum_{k=6}^{\infty} k(1-p)^{k-6} p &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+5)(1-p)^{k-1} p \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p + 5 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \\
&= E[X] + 5 = 11 \\
E[X \mid Y=5] &= 1,314 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot 11 = \underline{\underline{5,82}}
\end{aligned}$$

$\boxed{3.13}$

$$f_{X|X>1}(x) \cdot dx = P(X \in [x, x+dx] \mid X > 1) = \frac{P(\{X \in [x, x+dx]\} \bigcap \{X > 1\})}{P(X > 1)}$$

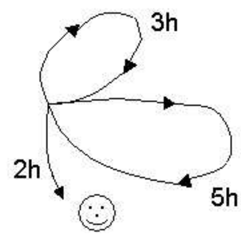
$$= \underline{\underline{\begin{cases} \frac{f_X(x) \cdot dx}{P(X>1)} & x > 1 \\ \frac{0}{P(X>1)} = 0 & ellers \end{cases}}}$$

$\boxed{3.21}$

- N - Antall dører valgt før han er i sikkerhet
- T_i - Gangtid ved det i'te valget
- X - Tiden han når sikkerhet

a)

$$\underline{\underline{X = \sum_{i=1}^{N} T_i}}$$



b)

$$\begin{aligned} p(N=1) &= \frac{1}{3} = p \\ p(N=2) &= (1-p)p \\ p(N=3) &= (1-p)^2 p \\ &\vdots \\ p(N=k) &= (1-p)^{k-1} p \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Geometrisk fordeling: $E[N] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{3}}$

c)

- Den siste turen, tur nr N, er veien til frihet; $T_N \equiv 2 \Rightarrow E[T_N] = 2$
- Observer at de andre turene, før tur nr N, varer enten 3 eller 5 timer.

$$E[T_i \mid N = n] = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 = \underline{\underline{4}} \qquad i < n$$

d)

$$\begin{aligned} E[\sum_{i=1}^{N} T_i \mid N = n] &= \sum_{i=1}^{n} E[T_i \mid N = n] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} E[T_i \mid N = n] + E[T_N] \\ &= (n-1) \cdot 4 + 2 = \underline{\underline{4n-2}} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} E[X] &= E[E[X \mid N]] = E[E[\sum_{i=1}^{N} T_i \mid N]] \\ &= E[4N-2] = 4 \cdot E[N] - 2 = 4 \cdot 3 - 2 = \underline{\underline{10}} \end{aligned}$$

$\boxed{3.24}$

- Slår mynt og krone (H og T) $P(H) = p$, $P(T) = 1 - p$
- N - Antall kast til minst en av hver
- F_H - Antall kast til første H. (Geometrisk: $E[F_H] = \frac{1}{p}$)
- F_T - Antall kast til første T. (Geometrisk: $E[F_T] = \frac{1}{1-p}$)
- F - Første kast

a)

$$\begin{aligned}
E[N] &= E[N \mid F = H] \cdot P(H) + E[N \mid F = T] \cdot P(T) \\
&= E[1 + F_T] \cdot p + E[1 + F_H] \cdot (1 - p) \\
&= \left(1 + \frac{1}{1-p}\right) \cdot p + \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot (1 - p) \\
&= \underline{\underline{1 + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}}}
\end{aligned}$$

b)
- N_H - Antall av N som er H
- N_T - Antall av N som er T

$$\begin{aligned}
E[N_H] &= E[N_H \mid F = H] \cdot P(H) + E[N_H \mid F = T] \cdot P(T) \\
&= (1 + E[F_T] - 1) \cdot p + 1 \cdot (1 - p) \\
&= \frac{1}{1-p} \cdot p + (1 - p) \\
&= \underline{\underline{1 - p + \frac{p}{1-p}}}
\end{aligned}$$

c) Tilsvarende b): $E[N_T] = \underline{\underline{p + \frac{1-p}{p}}}$
(Legg merke til at dette stemmer med at $E[N_H] + E[N_T] = E[N]$)

d) M - Antall kast til minst 2H og 1T

$$\begin{aligned}
E[M] &= E[M \mid F = H] \cdot P(H) + E[M \mid F = T] \cdot P(T) \\
&= (1 + E[N]) \cdot p + (1 + 2 \cdot E[F_H]) \cdot (1 - p) \\
&= \left(2 + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}\right) \cdot p + \left(1 + \frac{2}{p}\right) \cdot (1 - p) \\
&= \underline{\underline{\frac{3 + p^2}{p(p-1)}}}
\end{aligned}$$

$\boxed{3.30}$

- $X_0, X_1, \ldots$ u.i.f der $p(i) = P(X_i = i)$, $\sum_{i=1}^{m} p(i) = 1$
- La $N = min\{N > 0 : X_n = X_0\}$

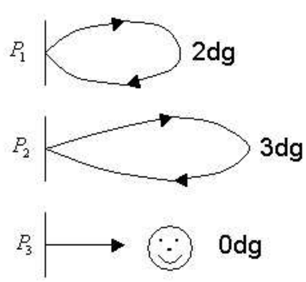
Har at

$$\begin{aligned}
P(N > n) &= P\{X_1 \neq X_0, X_2 \neq X_0, \ldots, X_n \neq X_0\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} P\{X_1 \neq X_0, X_2 \neq X_0, \ldots, X_n \neq X_0 \mid X_0 = i\} \cdot P(X_0 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (1 - p(i))^n \cdot p(i) \\
&\Downarrow \\
E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} (1 - p(i))^n p(i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} p(i) \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p(i))^n \\
&= \sum_{i=1}^{m} p(i) \cdot \frac{1}{p(i)} = \underline{\underline{m}}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x} \qquad x < 1$$

$\boxed{\text{3.38}}$

X_1 - Antall dager til fangen når frihet



a) Antar at $p_1 = 0,5,\ p_2 = 0,3,\ p_3 = 0,2$

$$\begin{aligned}
E[X_1] &= \sum_{i=1}^{3} E[X_1 \mid d\o r\ i] \cdot P_i \\
&= E[2 + X_1] \cdot 0,5 + E[3 + X_1] \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 \\
&= 0,8 \cdot E[X_1] + 1,9 \\
&\Downarrow \\
E[X_1] &= \frac{1,9}{0,2} = \underline{\underline{9,5}}
\end{aligned}$$

b)

- Gitt at det er lik sannsynlighet for å prøve de dørene han ikke har prøvd.
- Definer X_2: $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$
  Hjelpevariable:

$$Z_1 : p_2 = p_3 = \frac{1}{2},\ p_1 = 0 \quad \begin{cases} E[Z_1] = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1,5 \\ E[Z_1^2] = \frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 4,5 \end{cases}$$

$$Z_2 : p_1 = p_3 = \frac{1}{2},\ p_2 = 0 \quad \begin{cases} E[Z_2] = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1 \\ E[Z_2^2] = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2 \end{cases}$$

- Kan nå beregne

$$\begin{aligned}
E[X_2] &= E[2 + Z_1] \cdot \frac{1}{3} + E[3 + Z_2] \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \cdot E[Z_1] + \frac{1}{3} \cdot E[Z_2] \\
&= \underline{\underline{2,5}}
\end{aligned}$$

c) Skal finne variansen

- a)

$$\begin{aligned}
E[X_1^2] &= E[(2 + X_1)^2] \cdot 0,5 + E[(3 + X_1)^2] \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 \\
&= (4 + 4E[X_1] + E[X_1^2]) \cdot 0,5 + (9 + 6E[X_1] + E[X_1^2]) \cdot 0,3 \\
&= 4,7 + 3,8 \cdot E[X_1] + 0,8 \cdot E[X_1^2] \\
&= 4,7 + 3,8 \cdot 9,5 + 0,8 \cdot E[X_1^2] \\
&\Downarrow \\
E[X_1^2] &= \frac{40,8}{0,2} = 204 \\
&\Downarrow \\
Var[X_1] &= E[X_1^2] - E[X_1]^2 = 204 - (9,5)^2 = \underline{\underline{113,75}}
\end{aligned}$$

– b)

$$\begin{aligned}
E[X_2^2] &= E[(2+Z_1)^2]\cdot\frac{1}{3} + E[(3+Z_2)^2]\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} \\
&= (4+4E[Z_1]+E[Z_1^2])\cdot\frac{1}{3} + (9+6E[Z_2]+E[Z_2^2])\cdot\frac{1}{3} \\
&= (4+4\cdot 1,5+4,5)\cdot\frac{1}{3} + (9+6\cdot 1+2)\cdot\frac{1}{3} \\
&= 31,5\cdot\frac{1}{3} = 10,5 \\
&\Downarrow \\
Var[X_2] &= 10,5-(2,5)^2 = \underline{\underline{4,25}}
\end{aligned}$$

3.49

- N - Antall fisk Elise fanger i løpet av en dag. N $\sim$ Piosson(λ) $\quad \lambda = 30$
- X - Antall fisk Elise tar med hjem
  - Hun beholder hver fisk med sannsynlighet $p = \frac{1}{3}$
  - Enten beholder hun den, eller så kaster hun den uti.
  - Vi antar at avgjørelsene om hun beholder hver enkelt fisk er uavhengige.

$$\Rightarrow \quad X_{|N=n} \sim Bin(n,p)$$

- Fordelingen til X:

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(X=k, N=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} P(X=k \mid N=n)\cdot P(N=n) \\
&\vdots \qquad \text{(Se eksempel 3.20 s. 112 – 113)} \\
&= e^{-\lambda p}\cdot\frac{(\lambda p)^k}{k!} \Rightarrow X \sim Poisson(\lambda p)
\end{aligned}$$

a)

$$E[N] = \lambda = Var[N]$$
$$E[X] = \lambda p = Var[X]$$

3.53

- Se LF i boka s. 632
- Resultatet kan også vises ved hjelp av Gammafordelingen:

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$\boxed{\text{3.54}}$

1. Trekker 1 av 10 kronestykker n=1,. . . ,10. Kronestykke nr. n har sannsynlighet $\frac{n}{10}$ for å få “Head” - H.
2. Kaster denne mynten til vi får H.

- N = Antall kast for å få H

$$\begin{aligned} P(N=k) &= \sum_{n=1}^{10} P(N=k \mid Mynt\ nr.\ n) \cdot P(Mynt\ nr.\ n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} \left(1 - \frac{n}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{n}{10} \cdot \frac{1}{10} \\ &\neq (1-p)^{k-1} \cdot p \quad \Rightarrow IKKE\ geometrisk\ fordeling. \end{aligned}$$

- For at N skal være en geometrisk fordelt stokastisk variabel, må alle kronestykkene ha lik sannsynlighet for å få H.