Oppgaver fra læreboka

4.5

Nei, det vil ikke være en markovkjede. For eksempel så vil

$$p(Y_t = 1|Y_{t-1} = 1, Y_{t-2} = 1) = 0.5,$$

for da vet man at $X_{t-1} = 1$, mens

$$p(Y_t = 1|Y_{t-1} = 1, Y_{t-2} = 0) = 0.25,$$

for da vet man ikke om X_{t-1} er 1 eller 2. Tegn opp nodediagram for å se dette.

4.6

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{Vmatrix}$$

Skal vise at generell n-stegs overgangsmatrise er gitt ved

$$\mathbf{P}^n = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{Vmatrix}$$

Induksjonsbevis del 1:
Gitt at $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}$ som gitt over, skal vise at $\mathbf{P}^2$ er i samsvar med uttrykket over for $n = 2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^1 \cdot \mathbf{P}^1 &= \begin{Vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{Vmatrix} \\ &= \begin{Vmatrix} p^2 + (1-p)^2 & 2p(1-p) \\ 2p(1-p) & p^2 + (1-p)^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^2 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^2 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^2 \end{Vmatrix} \end{aligned}$$

OK!

Induksjonsbevis del 2:
Antar at uttrykket for $\mathbf{P}^n$ er gyldig, vil vise at uttrykket er gyldig også for $\mathbf{P}^{n+1}$.

$$\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^n \cdot \mathbf{P}^1 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{Vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{n+1}_{1\,1} = \mathbf{P}^{n+1}_{2\,2} &= \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p(2p-1)^n + \frac{1}{2}(1-p) - \frac{1}{2}(1-p)(2p-1)^n \\ &= \frac{1}{2} + p(2p-1)^n - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ &= \frac{1}{2} + (2p-1)^n(p - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + (2p-1)^{n+1} \end{aligned}$$

På samme måte,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{n+1}_{1\,2} = \mathbf{P}^{n+1}_{2\,1} &= \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p)(2p-1)^n + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p(2p-1)^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n(1-p-p) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Det vil si at

$$\mathbf{P}^{n+1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} \end{Vmatrix}$$

som skulle vises.

4.8

Definerer:

- Tilstand 0 : Mynt nr. 1 brukes
- Tilstand 1 : Mynt nr. 2 brukes
- Overgangsmatrise: P $= \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{Vmatrix}$
- $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$

Vi skal finne $P\{X_3 = 0\}$, altså sannsyligheten for at vi bruker mynt nr. 1 den tredje dagen etter det første kastet.

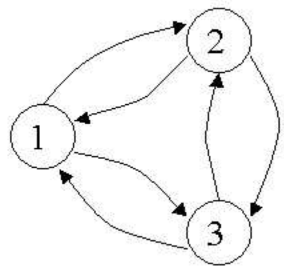
Vi må finne P^3:

$$P^2 = \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0.49 + 0.18 & 0.12 + 0.21 \\ 0.42 + 0.24 & 0.16 + 0.18 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.66 & 0.34 \end{Vmatrix}$$

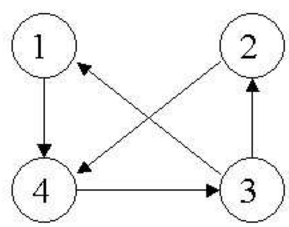
$$P^3 = \begin{Vmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.66 & 0.34 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0.469 + 0.198 & 0.132 + 0.201 \\ 0.462 + 0.204 & 0.136 + 0.198 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0.667 & 0.333 \\ 0.666 & 0.334 \end{Vmatrix}$$

$$P\{X_3 = 0\} = \sum_{i=0}^{1} P_{i0}^3 \alpha_i = P_{00}^3 \alpha_0 + P_{10}^3 \alpha_1 = 0.667 \cdot 0.5 + 0.666 \cdot 0.5 \approx \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

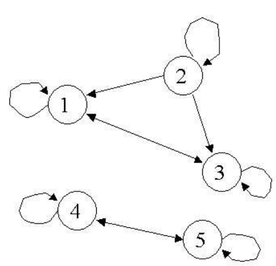
$\boxed{4.10}$



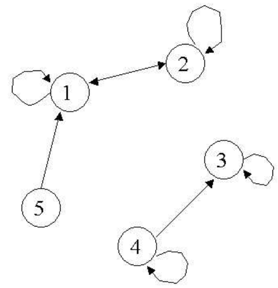
Ekv.klasse: $\{1, 2, 3\}$ - Rekurrent, aperiodisk



Ekv.klasse: $\{1, 2, 3, 4\}$ - Rekurrent, periodisk med periode =3



Ekv.klasser:
$\{1, 3\}$ Rekurrent, aperiodisk
$\{2\}$ Transient $\rightarrow \{1, 3\}$
$\{4, 5\}$ Rekurrent, aperiodisk



Ekv.klasser:
$\{1, 2\}$ Rekurrent, aperiodisk
$\{3\}$ Rekurrent, aperiodisk
$\{4\}$ Transient $\rightarrow \{3\}$
$\{5\}$ Transient $\rightarrow \{1, 2\}$

4.11

- M = Antall tilstander i Markovkjeden X_n
- Tilstand j kan nås fra tilstand i, $i \rightarrow j$ dvs. $Jn < \infty$ s.a.

$$P_{ij}^{(n)} > 0 \tag{1}$$

  Skal vise at $Jm \leq M$ s.a. (**??**) er oppfylt.

- Anta at $n > M$. Da finnes det en mulig sti S fra i til j med antall steg lik n, dvs. $Pr\{\text{S eksisterer}\} > 0$. Da er det minst en tilstand k som S er innom mer enn én gang. Siden Markov-kjeden er stasjonær, er det lik sannsynlighet for å ta samme valg ut fra k første gang en besøker k som siste gang en besøker k. Dermed finnes det med positiv sannsynlighet en sti S' der en kutter ut alle stegene på denne loopen.
- Dette kan en gjøre helt til en har besøkt alle tilstandene maksimalt én gang. Den resulterende stien S'' vil ha m steg der $m \leq M$. Siden det er positiv sannsynlighet for at S'' eksisterer, vil

  $\underline{\underline{P_{ij}^{(m)} \geq Pr\{S''\} > 0}}$

4.12

Se boka s.659

Eksamen Jan.'98 Oppg. 1

a) X_n, $n = 0, 1, 2, ...$ er en Markov-kjede fordi fordelingen til X_n vil kun avhenge av X_{n-1}, dvs. antall kuler av hver farge på tidspunkt n-1.

Utfallsrom: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Overgangsmatrise:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $T = min\{n \geq 0 : X_T = 0 eller X_T = 4\}$

Har da

$$\mu_i = Pr\{X_T = 4 | X_0 = i\} = \sum_{j=0}^{3} \mu_j P_{ij}, i = 1, 2, 3$$

$\mu_0 = 0, \mu_4 = 1$

dvs.

$$\mu_1 = \frac{1}{4}\mu_0 + \frac{3}{4}\mu_2 = \frac{3}{4}\mu_2$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_3$$

$$\mu_3 = \frac{3}{4}\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_4 = \frac{3}{4}\mu_2 + \frac{1}{4}$$

dvs.

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\mu_2 + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}\mu_2 + \frac{1}{4}) = \frac{3}{8}\mu_2 + \frac{3}{8}\mu_2 + \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\mu_2 = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}(\text{også opplagt fra symmetri})$$

$$\mu_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$