Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 1

Oppgaver fra læreboka

4.16

- P er dobbelt stokastisk $\iff \sum_i P_{ij} = 1 \ \forall j$
- La en slik kjede være irredusibel, aperiodisk og bestå av M+1 tilstander, 0,1,...,M
- Vis at grensesannsynligheten er gitt ved:

$$\pi_j = \frac{1}{M+1} \quad j = 0, ..., M \tag{1}$$

- Siden kjeden er aperiodisk og irredusibel, er grensesannsynligheten identisk med stasjonærfordeling som oppfyller:
  i)
$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$$
  ii)
$$\sum_i \pi_i = 1$$

- Vi ser at ved å sette $\pi_j = \frac{1}{M+1} \ \forall j$, får vi at:
  i)
$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} = \sum \frac{1}{M+1} P_{ij} = \frac{1}{M+1} \cdot \sum_i P_{ij} = \underline{\underline{\frac{1}{M+1}}}$$
  ii)
$$\sum_i \pi_i = \sum_{i=0}^{M} \frac{1}{M+1} = \frac{1}{M+1} \cdot (M+1) = \underline{\underline{1}}$$

- Altså er (**??**) grensefordelingen til Markovkjeden.

4.21

- La X_n være antall par sko ved frontdøren ved tid n. Har at:

$$\begin{aligned}
P_{01} &= P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 0) \\
&= P(\text{Går fra bakdøren,kommer til frontdøren} \mid X_{n-1} = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{4}} \\
&\Downarrow \\
P_{00} &= 1 - P_{01} = \underline{\frac{3}{4}} = P_{kk}
\end{aligned}$$

$$0 < i < k \begin{cases} P_{i-1,i} = P(\text{Går fra bakdøren,kommer til frontdøren} \mid X_{n-1} = i-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{4}} \\ P_{i,i-1} = P(\text{Går fra frontdøren,kommer til bakdøren} \mid X_{n-1} = i-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{4}} \\ P_{ii} = 1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \underline{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Overgangsmatirisen blir da:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

- Denne er dobbelt stokastisk(se oppgave 4.16), og dermed er $\pi_j = \frac{1}{k+1}$ $\forall j$ (P er både irredusibel og aperiodisk)
- Vi har at:

$$\begin{aligned}
P(\text{løper barfot}) &= P(X_n = 0 \mid \text{frontdør}) \cdot P(\text{frontdør}) + P(X_n = k \mid \text{bakdør}) \cdot P(\text{bakdør}) \\
&= \pi_0 \cdot \frac{1}{2} + \pi_k \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{k+1}}}
\end{aligned}$$

4.25

- Hver person har en av tre stillinger 1,2,3 og skifter stilling i henhold til en Markov-kjede med overgangssannsynligheter:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

- Stasjonærfordelingen er gitt ved

  i) $\pi_j = \sum_{i=1}^{3} \pi_i P_{ij} \iff P^T \cdot \pi = \pi \qquad \pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix}$

  ii) $\sum_{j=1}^{3} \pi_j = 1$

- i) gir at
  $(P^T - I) \cdot \pi = 0$
  $\Downarrow$
  $\pi_1 = 1.5 \cdot \pi_3$
  $\pi_2 = 1.75 \cdot \pi_3$

- ii) gir at
  $\pi_3 = 0.235$
  $\Downarrow$
  $\pi_1 = 0.353$
  $\pi_2 = 0.411$

- Dermed får vi- siden grensefordelingen forteller hvor stor andel tid hver person vil bli i hver stilling- at prosentandelen av ansatte i hver stilling er:

  Stilling 1: $\underline{\underline{35.3\%}}$
  Stilling 2: $\underline{\underline{41.1\%}}$
  Stilling 3: $\underline{\underline{23.5\%}}$

$\boxed{4.28}$

Se fasit i boken

$\boxed{4.32}$

Se fasit i boken

$\boxed{\text{Eks. Aug. '98, oppg. 2}}$

Tre ekvivalensklasser: {0,2},{1},{3,4,5}

- Tilstand 0 og 2 er rekurrente fordi kjeden aldri vil kunne forlate denne ekvivalensklassen

- Tilstand 1 er transient siden man umiddelbart vil forlate tilstanden og aldri vil kunne komme tilbake.

- Tilstandene 3,4 og 5 er transiente siden man alltid har en viss risiko for å gå til 1 eller 0, og i så fall aldri vil kunne komme tilbake.

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = i \mid X_0 = 5) = \underline{\underline{0}}$$

for i=1,3,4,5 fordi disse er transiente

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = i \mid X_0 = 5) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

for i=0,2 fordi

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

er dobbelt stokastisk.

$\boxed{\text{Eks. Jan. '98, oppg. 2}}$

a)

Når X_n=0 må $X_{n+1} \sim bin(12, 0.06)$ det vil si

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 0) &= \binom{12}{2} \cdot 0.06^2 \cdot 0.94^{10} \\ &= \underline{\underline{0.128}} \end{aligned}$$

tilsvarende

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 2) &= \binom{10}{0} \cdot 0.06^0 \cdot 0.94^{10} \cdot \binom{2}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^2 \\ &= \underline{\underline{0.135}} \end{aligned}$$

La A_n være antall medlemmer som både disponerer bil på dag n og ønsker bil på dag n+1.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) &= P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1, A_n = 0) \cdot P(A_n = 0 \mid X_n = 1) \\ &\quad + P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1, A_n = 1) \cdot P(A_n = 1 \mid X_n = 1) \\ &= \binom{11}{1} \cdot 0.06^1 \cdot 0.94^{10} \cdot 0.5 + \binom{11}{0} \cdot 0.06^0 \cdot 0.94^{11} \cdot 0.5 \\ &= \underline{\underline{0.431}} \end{aligned}$$

b)
W_n: beløp betalt av medlemmene på dag n.

$$W_n = \begin{cases} X_n \cdot 125 & hvis\ X_n \leq 2 \\ 2 \cdot 125 & hvis\ X_n = 3 \end{cases}$$

I det lang løp:

$$\begin{aligned} E[W_n] &= 0 \cdot \pi_0 + 125 \cdot \pi_1 + 250 \cdot \pi_2 + 250 \cdot \pi_3 \\ &= \underline{\underline{136.25}} \end{aligned}$$

Antall biler utleid pr. dag i det lange løp er:

$0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 + 2 \cdot \pi_3 = 1.09$

Per vil benytte sin del av dette, dvs. andel dager per disponerer bil blir:

$\frac{1.09}{12} = \underline{\underline{0.0908}} =$P(Per disponerer)

P(Per disponerer|Per ønsker)$= \frac{P(Per\ disp. \cap Per\ ønsker)}{P(Per\ ønsker)} = \frac{P(Per\ disp.)}{P(Per\ ønsker)}$

Trenger P(Per ønsker)!

$$\begin{aligned} P(\text{Per ønsker på dag } n) &= P(\text{Per ønsker på dag } n \mid \text{Per disp. på dag } n-1) \\ &\quad \cdot P(\text{Per disp. på dag } n-1) \\ &\quad + P(\text{Per ønsker på dag } n \mid \text{Per disp. ikke på dag } n-1) \\ &\quad \cdot P(\text{Per disp. ikke på dag } n-1) \\ &= 0.5 \cdot \frac{1.09}{12} + 0.06 \cdot (1 - \frac{1.09}{12}) \\ &= \underline{\underline{0.100}} \end{aligned}$$

slik at:
$P(Per\ disponerer \mid Per\ ønsker) = \frac{0.0908}{0.100} = \underline{\underline{0.909}}$

c)
Nå blir medlemmenes oppførsel uavhengig av hverandre. Innfører:

$$U_n = \begin{cases} 1 & hvis\ bestemt\ medlem\ ønsker/disp.\ bil \\ 0 & ellers \end{cases}$$

Dette blir en Markov-kjede med overgangsmatrise

$$P = \begin{bmatrix} 0.94 & 0.06 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Grensefordelingen blir gitt av:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 = 0.94 \cdot \pi_0 + 0.5 \cdot \pi_1 \\ \pi_1 = 0.06 \cdot \pi_0 + 0.5 \cdot \pi_1 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0 = 0.8929 \quad \pi_1 = 0.1071$$

La Y_n være antall medlemmer som ønsker bil på dag n. I det lange løp blir da:

$Y_n \sim bin(12, 0.1071)$

slik at:

P($Y_n = 0$)=0.2568
P($Y_n = 1$)=0.3697
P($Y_n = 2$)=0.2439
P($Y_n \geq 3$)=0.1297

La:

V_n: netto-inntekt på dag n, dvs.

$$V_n = \begin{cases} 125 \cdot Y_n & hvis\ Y_n \leq 2 \\ 125 \cdot Y_n - 250 \cdot (Y_n - 2) & hvis\ Y_n \geq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 125 \cdot Y_n & hvis\ Y_n \leq 2 \\ 500 - 125 \cdot Y_n & hvis\ Y_n \geq 3 \end{cases}$$

I det lange løp:

$$\begin{aligned} E[V_n] &= 125 \cdot P(Y_n = 1) + 250 \cdot P(Y_n = 2) \\ &\quad + \sum_{i=3}^{12} (500 - 250 \cdot i) \cdot P(Y_n = i) \\ &= 125 \cdot P(Y_n = 1) + 250 \cdot P(Y_n = 2) \\ &\quad +500 \cdot P(Y_n \geq 3) - 125 \cdot \underbrace{\sum_{i=3}^{12} i \cdot P(Y_n = i)}_{=E[Y_n] - P(Y_n=1) - 2 \cdot P(Y_n=2)} \\ &= 125 \cdot 0.3697 + 250 \cdot 0.2439 + 500 \cdot 0.1297 - 125 \cdot (12 \cdot 0.1071 - 0.3697 - 2 \cdot 0.2439) \\ &= \underline{\underline{118.58}} \end{aligned}$$