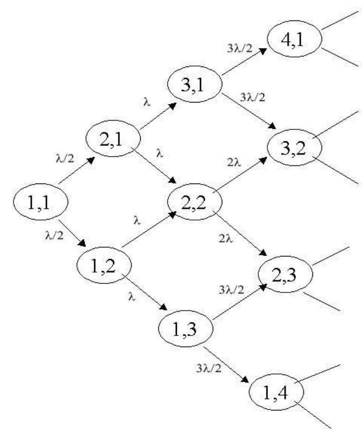
Oppgaver fra læreboka

5.4



T_i = Behandlingstiden til kunde i

Finn: $Pr(\text{A er sistemann som går})$
$= Pr(T_B + T_C < T_A) = p$

a)
Behandlingstiden $T_i \equiv 10$ min: $\underline{\underline{p = 0}}$

b)
Fordelingen til T_i er

$$Pr(T_i = t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{t=1,2,3} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p &= Pr(T_B + T_C < T_A) = Pr(T_B + T_C = 2,\ T_A = 3) \\ &= Pr(T_B = T_C = 1,\ T_A = 3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{27}}} \end{aligned}$$

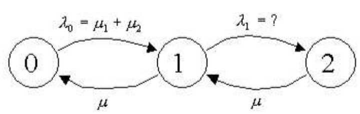
c)
$T_i \sim \exp(\mu)$ iid.

$$\begin{aligned} p &= Pr(T_B + T_C < T_A) = Pr(T_B + T_C < T_A,\ T_B < T_A) \\ &= Pr(T_B + T_C < T_A \mid T_B < T_A) \cdot Pr(T_B < T_A) \\ &= Pr(T_C < T_A) \cdot Pr(T_B < T_A) \qquad\qquad (T_A \text{ glemsk}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

eventuelt

$$\begin{aligned} p &= Pr(\text{C ferdig før A, B ferdig før A}) \\ &= Pr\underbrace{(\text{C ferdig før A} \mid \text{B ferdig før A})}_{\text{exp-ford. glemsk +symmetrisk}} \cdot Pr\underbrace{(\text{B ferdig før A})}_{\text{symmetrisk}} \end{aligned}$$

$\boxed{5.6}$



$$\begin{aligned} p &= Pr(\text{Smith er } \underline{\text{IKKE}} \text{ sistemann som forlater postkontoret}) \\ &= Pr(\text{Jones er sist}) + Pr(\text{Brown er sist}) \\ &= Pr(T_B < T_J) \cdot Pr(T_S < T_J) + Pr(T_J < T_B) \cdot Pr(T_S < T_B) \qquad (\text{se } 5.2) \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \underline{\underline{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2}} \end{aligned}$$

$\boxed{5.10}$

Se boka side 662.

$\boxed{5.14}$

$X \sim \exp(\lambda)$

a)
Vi trenger:
i) $P(X < c) = 1 - e^{-\lambda c} = p_c$
ii)

$$f_{X|X<c}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{p_c} & 0 < x < c \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da får vi definisjonen(s. 97)

$$\begin{aligned}
E[X|X<c] &= \int_0^\infty x\, f_{X|X<c}(x)dx = \int_0^c x\,\frac{f_X(x)}{p_c}dx \\
&= \frac{1}{p_c}\int_0^c x\,\lambda\, e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{1}{p_c}\left[-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^c \\
&= \frac{1}{p_c}\left[\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda c}) - c\,e^{-\lambda c}\right] \qquad (1-p_c = e^{-\lambda c}) \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{\lambda} - c\,\frac{1-p_c}{p_c}}}
\end{aligned}$$

b)
Har at $E[X|X>c] = c + E[X] = c + \frac{1}{\lambda}$

Dermed får vi fra identiteten

$$\begin{aligned}
E[X|X<c] &= \frac{1}{p_c}\left[E[X] - (1-p_c)\, E[X|X>c]\right] \\
&= \frac{1}{p_c}\left[\frac{1}{\lambda} - (1-p_c)(c+\frac{1}{\lambda})\right] \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{\lambda} - c\,\frac{1-p_c}{p_c}}}
\end{aligned}$$

5.23

Se boka side 663.

Eks. Aug '01, oppg 2

a) Vet at den kumulative fordelingen til eksponentialfordelingen er gitt ved

$$F(x) = 1 - e^x,\; x > 0$$

Den inverse av denne er gitt ved

$$F(x) = 1 - e^x \Leftrightarrow F^{-1}(u) = \log(1-u)$$

slik at Y kan simuleres ved å trekke $U \sim Unif[0,1]$ og så sette $Y = F^{-1}(U) = \log(1-U)$.

b) Vi ser at

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2+x}$$

For å finne en konstant som alltid er større enn $f(x)/g(x)$ må vi finne den største verdien $e^{-x^2/2+x}$ kan ha for $x > 0$. Dette gjør vi ved derivasjon, og vi deriverer bare eksponenten da eksponentialfunksjonen er en monoton funskjon.

$$(-x^2/2 + x)' = -x + 1 \Rightarrow x_{max} = 1$$

Vi får dermed at

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{1/2}$$

Dermed blir simuleringsalgoritmen seende slik ut:

1. Trekk $X \sim g(x)$ ved hjelp av algoritmen over og trekk $U \sim Unif[0, 1]$
2. Hvis $U \leq \frac{f(Y)\,\sqrt{2\pi}}{2\,e^{1/2}\,g(Y)}$ så settes $Z = Y$. Ellers begynn igjen på 1.

c) La

$$X \sim h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

og la $W = |X|$. Da er

$$\begin{aligned} F_W(w) = P(W \leq w) = P(|X| \leq w) &= P(-w \leq X \leq w) \\ &= \Phi(w) - \Phi(-w) = 2\Phi(w) - 1 \end{aligned}$$

Dermed blir

$$f_W(w) = F'_W(w) = 2\,h(w) = f(w) \;\; Q.E.D.$$

Vi kan simulere X ved å simulere Z og $U \sim Unif[0.1]$ og sette

$$X = \begin{cases} Z, \text{hvis } U \leq 1/2 \\ -Z, \text{hvis } U > 1/2 \end{cases}$$