



Oppgaver fra læreboka

5.25

Nyretransplantasjon

$$T_A \sim \exp(\mu_A)$$

$$T_B \sim \exp(\mu_B)$$

$$T_1 = \text{Tid til første nyre ankommer} \sim \exp(\lambda)$$

$$T_2 = \text{Ventetid mellom ankomst av 1. og 2 nyre} \sim \exp(\lambda)$$

(siden tilførselen av nyrer er
en Poisson-prosess (se s. 262))

Regler:

- i) 1. nyre går til A (og til B hvis A er død)
- ii) 2. nyre går til B (hvis B fortsatt lever)

a)

$$Pr(A \text{ får ny nyre}) = Pr(T_1 < T_A) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_A} \quad (\text{Se s. 249})$$

b)

$$\begin{aligned} Pr(B \text{ får ny nyre}) &= Pr(T_B > T_1)P(T_A < 1) + P(T_B > T_1 + T_2)P(T_A > T_1) \\ &= Pr(T_B > T_1)P(T_A < 1) + P(T_B > T_1 + T_2 | T_B > T_1)P(T_B > T_1)P(T_A > T_1) \\ &= Pr(T_B > T_1)P(T_A < 1) + P(T_B > T_2)P(T_B > T_1)P(T_A > T_1) \\ &= \frac{\lambda}{\mu_B + \lambda} \cdot \frac{\mu_A}{\mu_A + \lambda} + \left(\frac{\lambda}{\mu_B + \lambda} \right)^2 \cdot \frac{\lambda}{\mu_A + \lambda} \end{aligned}$$

5.35

$N(t)$ = Antall biler som passerer i tidsrom $t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$
 s = Tid det tar å krysse vegen $\lambda = 0,05$ per sek

$$\begin{aligned} Pr(\text{Reb forblir uskadet}) &= Pr(N(s) = 0) = \underline{\underline{e^{-\lambda s}}} \\ &= \begin{cases} 0,905 & s = 2 \\ 0,779 & s = 5 \\ 0,607 & s = 10 \\ 0,368 & s = 20 \end{cases} \end{aligned}$$

5.40

$$\begin{aligned} N(t) &\sim \text{Poisson}(\lambda t) \\ S_n &= \text{Tidspunkt for } n\text{'te hendelse} \sim \text{Gamma}(\lambda, n) \\ E[S_n] &= \frac{n}{\lambda} \end{aligned}$$

a)

$$E[S_4] = \underline{\underline{\frac{4}{\lambda}}}$$

b)

$$\begin{aligned} E[S_4 | N(1) = 2] &= E[T_1 + T_2 + T_3 + T_4 | N(1) = 2] \\ &= E[1 + T_3 + T_4] \\ &= 1 + \underline{\underline{\frac{2}{\lambda}}} \end{aligned}$$

Vi vet at T_3 ennå ikke har inntruffet, og siden $T_3 \sim \exp(\lambda)$, blir det som å starte på nytt igjen med T_3 .

c) Uavhengige inkremitter gir at

$$\begin{aligned} E[N(4) - N(2) | N(1) = 3] &= E[N(4) - N(2)] \\ &= E[N(4 - 2)] = E[N(2)] \\ &= \underline{\underline{2\lambda}} \end{aligned}$$

5.57

Kunder kjem til ein bank ifølge ein Poisson-prosess med rate λ . Anta at to kunder kjem den første timen, altså er $N(1) = 2$.

I denne oppgåva treng vi å vite at $P(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

Kva er sannsynet for :

- a) At begge kom den iløpet av dei første 20 minutta?

Vi vil altså finne :

$$\begin{aligned}
 P(N(\tfrac{1}{3}) = 2 \mid N(1) = 2) &= \frac{P(N(\tfrac{1}{3}) = 2 \cap N(1) = 2)}{P(N(1) = 2)} \\
 &= \frac{P(N(\tfrac{1}{3}) = 2) \cdot P(N(\tfrac{2}{3}) = 0)}{P(N(1) = 2)} \\
 &= \frac{e^{-\lambda \frac{1}{3}} \frac{(\lambda \frac{1}{3})^2}{2!} e^{-\lambda \frac{2}{3}} \frac{(\lambda \frac{2}{3})^0}{0!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!}} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \lambda^2}{e^{-\lambda} \lambda^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}
 \end{aligned}$$

- b) At minst ein av kundane kom iløpet av dei første 20 minutta?

Her har vi to muligheiter. Enten kan begge komme iløpet av dei første 20 minutta, eller så kan den eine komme iløpet av dei første 20 minutta, og den andre iløpet av dei 40 siste. Den første muligheita rekna vi ut i a). Den andre er:

$$\begin{aligned}
 P(N(\tfrac{1}{3}) = 1 \mid N(1) = 2) &= \frac{P(N(\tfrac{1}{3}) = 1 \cap N(1) = 2)}{P(N(1) = 2)} \\
 &= \frac{P(N(\tfrac{1}{3}) = 1) \cdot P(N(\tfrac{2}{3}) = 1)}{P(N(1) = 2)} \\
 &= \frac{e^{-\lambda \frac{1}{3}} \frac{(\lambda \frac{1}{3})^1}{1!} e^{-\lambda \frac{2}{3}} \frac{(\lambda \frac{2}{3})^1}{1!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!}} \\
 &= \frac{\frac{2}{9} e^{-\lambda} \lambda^2}{\frac{1}{2} e^{-\lambda} \lambda^2} = \frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

Sannsynet for at minst ein kom iløpet av dei første 20 minutta, vil då bli $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \underline{\underline{\frac{5}{9}}}$

5.58

$N = \text{antall feil} \sim \text{Poisson}(c)$

$T_i = \text{tidspunktet feil } i \text{ vil slå inn} \sim \text{iid } G$

a) $N(t) = \text{antall feil ved tid } t$

Har at

$N(t) \mid N = n \sim \text{Bin}(n, p)$, der $p = P(T_i \leq t) = G(t)$

$\Downarrow$ (Statistikk 1)

$N(t) \sim \text{Poisson}(c \cdot G(t))$

b) $R(t) = \text{antall feil som gjenstår i systemet ved tid } t$

Har at

$R(t) \mid N = n \sim \text{Bin}(n, q)$, der $q = P(T_1 > t) = 1 - G(t)$

$\Downarrow$

$R(t) \sim \text{Poisson}(c \cdot (1 - G(t)))$

c) Skal vise at $N(t)$ og $R(t)$ er uavhengige.

Se beviset for Prop. 5.2 s. 258, og bytt ut $\lambda \cdot t$ med c .

Da får vi at når $p = G(t)$

$$\begin{aligned} P_r\{N(t) = n, R(t) = r\} &= \dots = e^{-c \cdot p \cdot \frac{(c \cdot p)^n}{n!}} \cdot e^{-c \cdot (1-p) \cdot \frac{[c(1-p)]^r}{r!}} \\ &= \underline{\underline{P_r\{N(t) = n\} \cdot P_r\{R(t) = r\}}} \end{aligned}$$

5.59 $N =$ antallet feil i en test $\sim \text{Poisson}(\lambda)$ $P_i =$ sanns. for at korrekturleser nr. i finner feilen, $i = 1, 2$ $X_1 =$ antall feil funnet av 1, men ikke av 2 $X_2 =$ antall feil funnet av 2, men ikke av 1 $X_3 =$ antall feil funnet av begge $X_4 =$ antall feil ikke funnet

- a) $X_1, \dots, X_4$ har marginalfordelinger som vist i b). Tilsvarende som i oppg. 5.44c), er de uavh. og har simultanfordeling

$$P_r\{X_1 = x_1, \dots, X_4 = x_4\} = P_r\{X_1 = x_1\} \cdot \dots \cdot P_r\{X_4 = x_4\}$$

b)

Har at

$$X_1 \mid N = n \sim \text{Bin}(n, p) \quad p = p_1(1 - p_2)$$

 $\Downarrow$

$$X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot p) \quad \Rightarrow \quad E[X_1] = \lambda p_1(1 - p_2)$$

$$X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot p_2(1 - p_1)) \quad \Rightarrow \quad E[X_2] = \lambda p_2(1 - p_1)$$

 $\vdots$

$$E[X_3] = \lambda p_1 p_2 \quad (1)$$

$$X_4 \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot (1 - p_1)(1 - p_2)) \quad \Rightarrow \quad E[X_4] = \lambda(1 - p_1)(1 - p_2) \quad (2)$$

$$\text{Dette gir at } \frac{E[X_1]}{E[X_3]} = \frac{1-p_2}{p_2} \text{ og } \frac{E[X_2]}{E[X_3]} = \frac{1-p_1}{p_1}$$

c)

Estimator:

Setter inn $X_1, \dots, X_3$ for $E[X_1], \dots, E[X_3]$ i svarene fra oppgave b), og får

$$\underline{\underline{\hat{p}_1 = \frac{X_3}{X_2 + X_3}}} \text{ og } \underline{\underline{\hat{p}_2 = \frac{X_3}{X_1 + X_3}}}$$

Fra (1) får vi

$$\underline{\underline{\hat{\lambda} = \frac{X_3}{\hat{p}_1 \hat{p}_2} = \dots = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \frac{X_1 \cdot X_2}{X_3}}{X_3}}}$$

d)

$$(2) \text{ gir: } \underline{\underline{\hat{X}_4 = \hat{\lambda}(1 - \hat{p}_1)(1 - \hat{p}_2) = \dots = \frac{X_1 \cdot X_2}{X_3}}}$$

5.65

$X(t)$ = antall slag $\sim \text{Poisson}(\lambda t)$

Systemet kollapse med sanns. p for hvert slag.

T = tidspunktet syst. kollapse

N = antall slag som trengs

$\Rightarrow X(t) = N$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P(T \leq t \mid N = n) &= P(\text{systemet har kollapse ved tid } t \mid N = n) \\ &= \underline{\underline{P(X(t) \geq n)}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Evt.: } T \mid N = n \sim \text{gamma}(n, \lambda)}$$

b) $H(t)$ = antall harmløse slag av de hittil $X(t)$ slagene. Hvert slag er harmløst med sanns. $(1 - p)$.

Fra Prop. 5.3 (s.266) har vi at

$$E[H(t)] = \lambda \int_0^t (1 - p) ds = \lambda t(1 - p)$$

og

$$H(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t(1 - p))$$

Dermed har vi at

$P_r(N = n \mid T = t) = P_r(N = n \mid 1 \text{ harmfullt slag ved tid } t \text{ og bare harmløse før det})$

$$= P_r(H(t) = n - 1) = \frac{[\lambda t(1-p)]^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t(1-p)} = \underline{\underline{P_r[H(t) + 1 = n]}}$$

5.67

“Single server”-stasjon.

V_i = tid mellom ankomster $\sim F(iid)$

S_i = servicetid $\sim G(iid)$

X_n = antallet kunder i systemet rett før n 'te ankomst

Y_n = antallet kunder i systemet rett etter n 'te avgang

Har at

$$X_n = X_{n-1} + 1 - D_n \quad \text{og} \quad Y_n = \begin{cases} Y_{n-1} - 1 + A_n & Y_{n-1} \geq 1 \\ A_n & Y_{n-1} = 0 \end{cases} \quad (\star)$$

der

D_n = antall betjente i løpet av n 'te ankomsttid V_n

A_n = antall ankomne i løpet av n 'te avgangstid S_n

Krav:

$\{X_n\}$ Markovkjede $\Leftrightarrow X_n \mid X_{n-1}$ uavh. av $\{X_k\}_{k \leq n-2}$

- a) Hvis $V_i \sim F = \exp(\lambda)$, dvs. glemsk, da er A_n uavh. av alt som skjedde før Y_{n-1} , dvs. uavh av $\{Y_k\}_{k \leq n-2}$. (A_n er imidlertid avh. av S_n).

Fra $(\star)$ har vi da at $Y_n \mid Y_{n-1}$ er uavh. av $\{Y_k\}_{k \leq n-2} \Rightarrow \{Y_n\}$ er en Markovkjede.

(Hvis F ikke var glemsk, ville A_n vært avhengig av hvor lenge før Y_{n-1} , forrige ankomst forekom; kall denne tiden T . Hvis $(Y_{n-k}, \dots, Y_{n-1}) = (r+k, \dots, r)$ dvs at ingen er ankommet i løpet av de k siste avgangstidene, er det stor sanns. for at T er stor. Dermed er A_n avh. av $\{Y_k\}_{k \leq n-2} \Rightarrow \{Y_n\}$ IKKE Markov!!!

$$\{Y_k\}_{k \leq 2} \xleftrightarrow{avh.} T \xleftrightarrow{avh.} A_n$$

- b) Hvis $S_i \sim G = \exp(\mu)$, dvs. glemsk, da er D_n uavh. av alt som skjedde før X_{n-1} , dvs. uavh. av $\{X_k\}_{k \leq n-2}$

Fra $(\star)$ har vi da at $X_n \mid X_{n-1}$ er uavh. av $\{X_k\}_{k \leq n-2} \Rightarrow \{X_n\}$ er en Markovkjede.

Vha. et tilsvarende argument som a), får en at $\{X_n\}$ ikke er en Markovkjede hvis G ikke er glemsk.

c) Fra a) har vi at når $F \sim \exp(\lambda)$, er $\{Y_n\}$ en Markovkjede, og $(\star)$ gir at

$$\begin{aligned} Pr\{Y_n = k \mid Y_{n-1} = j\} &= Pr\{Y_{n-1} - 1 + A_n = k \mid Y_{n-1} = j\} \\ &= Pr\{A_n = k - j + 1 \mid Y_{n-1} = j\} = Pr\{A_n = k - j + 1\} \end{aligned}$$

(A_n uavh. av Y_{n-1} , $j \geq 1$)

Loven om totalsannsn., (LTS), gir at

$$Pr\{A_n = k'\} = \int_0^\infty Pr\{A_n = k' \mid S_n = s\} \cdot g_{s_n}(s) ds = \int_0^\infty \frac{(\lambda s)^{k'}}{k'!} e^{-\lambda s} \cdot g_{s_n}(s) ds$$

Overgangssannsynlighet for $\{Y_n\}$ blir

$$P_{Y_n}(j, k) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\lambda s)^{k-j+1}}{(k-j+1)!} e^{-\lambda s} g(s) ds & j \geq 1, k \geq j-1 \\ \int_0^\infty \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} g(s) ds & j = 0, k \geq j \end{cases}$$

Tilsvarende har en at når $G \sim \exp(\mu)$, er $\{X_n\}$ en Markovkjede og $(\star)$ gir

$$\begin{aligned} Pr\{X_n = k \mid X_{n-1} = j\} &= Pr\{X_{n-1} + 1 - D_n = k \mid X_{n-1} = j\} \\ &= Pr\{D_n = j - k + 1 \mid X_{n-1} = j\} \end{aligned}$$

Hvis en betinger på ankomsttiden V_n får en at

$$Pr\{D_n = k' \mid V_n = v, X_{n-1} = j\} = \begin{cases} \frac{(\mu v)^{k'}}{k'!} e^{-\mu v} & k' \leq j \\ \sum_{i=k'}^\infty \frac{(\mu v)^i}{i!} e^{-\mu v} & k' = j+1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} = P_{j,k'}(v)$$

Dermed får vi at

$$P_{X_n}(j, k) = \int_0^\infty P_{j,j-k+1}(v) \cdot f_{v_n}(v) dv$$

6.1

- Gitt at vi har hhv n, m hanner og hunner, er

$$Pr\{\text{Hann } i \text{ møter hunn } j \text{ i løpet av tidsrom } h\} = \lambda h + o(h)$$

Antall barn disse to føder blir da en Poisson-prosess med rate λ , og ventetiden til første fødsel er da

$$T_{ij} \sim \exp(\lambda)$$

Ventetiden til hele populasjonens første fødsel blir

$$T = \min_{i,j} \sim \exp(n \cdot m \cdot \lambda) \quad (\text{se (5.6) s. 243})$$

(Det er $n \cdot m$ kombinasjoner av hanner og hunner)

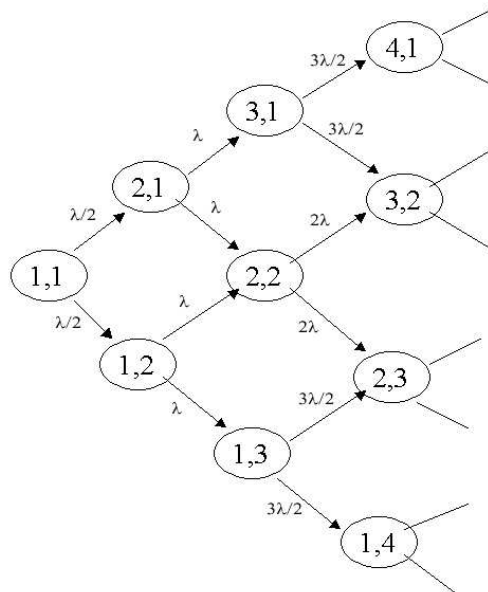
- [i)]

I tilstand $\{n, m\}$ har vi da at

$$\begin{aligned} v_{\{n,m\}}^{-1} &= E[\text{Tid i tilstand } \{n, m\} \text{ før en går videre}] \\ &= E[T] \\ &= \frac{1}{nm\lambda} \Rightarrow \underline{\underline{v_{\{n,m\}} = nm\lambda}} \end{aligned}$$

2. Det er lik sannsynlighet for å føde hann eller hunn, så

$$P_{\{n,m\}, \{n+1,m\}} = P_{\{n,m\}, \{n,m+1\}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$



Eventuelt:

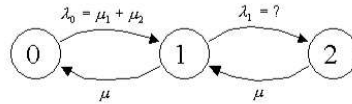
$$\begin{aligned} Pr\{\text{Hann } i \text{ møter IKKE hunn } j \text{ i løpet av } h\} &= 1 - \lambda h + o(h) \\ &\Downarrow \\ Pr\{\text{Ingen hanner møter noen hunner i løpet av } h\} &= (1 - \lambda h + o(h))^{nm} \\ &= 1 - nm\lambda h + o(h) \\ &= \underline{\underline{P_{ii}(h)}} \end{aligned}$$

Fra lemma 6.7 (s. 316) har vi at

$$\nu_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nm\lambda h + o(h)}{h} = \underline{\underline{nm\lambda}}$$

6.3

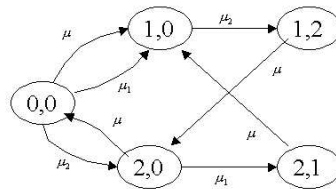
- Hvis vi analyserer prosessen mhp antall maskiner som er i ustand, får vi at



MEN vi kan ikke analysere dette videre, siden λ_1 avhenger av *hvilken* maskin som sviktet først.

- Istedet kan vi se på tilstandene

$$X_t = \begin{cases} (0,0) - \text{Begge i orden.} \\ (1,0) - \text{Maskin 1 i ustand, M2 i orden.} \\ (2,0) - \text{Maskin 2 i ustand, M1 i orden.} \\ (1,2) - \text{M1 repareres, M2 i ustand.} \\ (2,1) - \text{M2 repareres, M1 i ustand.} \end{cases}$$



- Vi får

$$P = \begin{matrix} & (0,0) & (1,0) & (2,0) & (1,2) & (2,1) \\ \begin{matrix} (0,0) \\ (1,0) \\ (2,0) \\ (1,2) \\ (2,1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} & \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\mu + \mu_2} & 0 & 0 & \frac{\mu_2}{\mu + \mu_2} & 0 \\ \frac{\mu}{\mu + \mu_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_1}{\mu + \mu_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 + \mu \\ \mu_1 + \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$