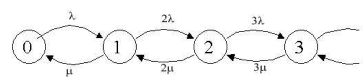
6.6

- Fødsels- og dødsprosess

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_i = (i+1)\lambda \\ \mu_i = i\mu\end{array}\right\} \quad i \geq 0$$



- Fra s. 321 har vi at

$$\begin{aligned} E[T_i] &= E[\text{Tid på å gå fra } i \text{ til } i+1] \\ &= \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} E[T_{i-1}]. \end{aligned}$$

- Ved å sette inn for λ_i og μ_i får en at

$$E[T_i] = \frac{1}{(i+1)\lambda}\left[1 + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \cdots + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i\right]$$

a) Får at

$$\begin{aligned} E[T_{0\to 4}] &= E[\text{Tid å gå fra tilstand 0 til 4}] \\ &= E[T_0 + T_1 + T_2 + T_3] \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3\right] \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{12\lambda}\left[25 + 13\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + 7\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + 3\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3\right]}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} E[T_{2\to 5}] &= E[T_2 + T_3 + T_4] \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^4\right]}} \end{aligned}$$

c)

$$\mathrm{Var}[T_i] = \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i+\mu_i)} + \frac{\mu_i}{\lambda_i}\mathrm{Var}[T_{i-1}] + \frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda_i}\left(E[T_{i-1}]+E[T_i]\right)^2$$

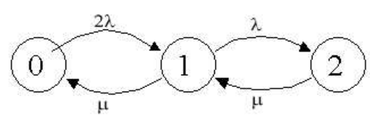
Pga Markov-egenskapen er T_i'ene uavhengige, og vi får at

$$\mathrm{Var}[\mathrm{T}_{\mathrm{i}\to\mathrm{j}}] = \sum_{\mathrm{k=i}}^{\mathrm{j-1}} \mathrm{Var}[\mathrm{T}_{\mathrm{k}}] \qquad \to \qquad \text{Sett inn og regn ut!}$$

$\boxed{6.8}$

- Vi har en fødsels- og dødsprosess der

$$X_t = \text{Antall maskiner i ustand}$$



- Parametrene til prosessen er

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda+\mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$[q_{ij}] = [v_i P_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & 0 \\ \mu & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

- Fra s. 327 har vi baklengs Kolmogorov

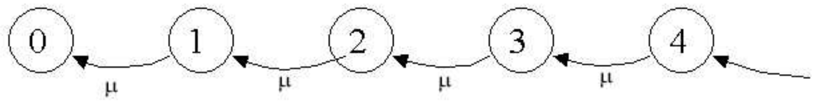
$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

- Vi setter inn og får:

$$\begin{aligned} P'_{0j}(t) &= 2\lambda P_{1j}(t) - 2\lambda P_{0j}(t) \\ P'_{1j}(t) &= \mu P_{0j}(t) + \lambda P_{2j}(t) - (\lambda+\mu)P_{ij}(t) \\ P'_{2j}(t) &= \mu P_{1j}(t) - \mu P_{2j}(t) \end{aligned}$$

$\boxed{6.9}$

- Ren dødsprosess



- Fra figuren ser vi at

$$q_{ij} = \begin{cases} \mu & 0 \leq j = i-1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- Vi har imidlertid at hvis $Y(t) \sim \text{Poisson}(\mu t)$, så er antallet døde i løpet av et tidsrom t relatert til denne prosessen, men en må ta hensyn til at ikke flere enn de som er i systemet kan dø, dvs

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} Pr\{Y(t) = i-j\} = \frac{(\mu t)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\mu t} & 1 \leq j \leq i \\ Pr\{Y(t) \geq i\} = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} & \\ \qquad\qquad\qquad\; = 1 - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} & 0 = j \leq i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- Dette var enklere enn å bruke baklengs Kolmogorov på f.eks.

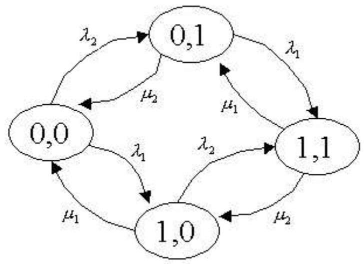
$$\left.\begin{aligned} P'_{10}(t) &= q_{10} \cdot \overbrace{P_{00}(t)}^{=1} - \mu P_{10}(t) \\ &= \mu - \mu P_{10}(t) \\ P_{10}(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \overset{\text{regning...}}{\Rightarrow} \quad P_{10}(t) = \underline{\underline{1 - e^{-\mu t}}}$$

- Vi ser at dette resultatet stemmer med det ovenfor:

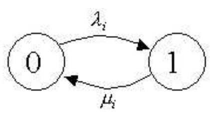
$$P_{10}(t) = Pr\{Y(t) \geq 1\} = 1 - Pr\{Y(t) = 0\} = \underline{\underline{1 - e^{-\mu t}}}$$

$\boxed{6.10}$

- Markov-prosess; tilstand til maskin 1 og 2



- På grunn av den antatte uavhengigheten mellom maskinene, kan vi også se på problemet som to uavhengige markovkjeder (1) og (2).



$i \in \{1, 2\}$

- At markovkjeden er i tilstand (0,1) betyr at kjede (1) er i tilstand 0 og kjede (2) er i tilstand 1. Uavhengigheten gir at:

$$P_{(i,j),(k,l)}(t) = P_{ik}^{(1)}(t) \cdot P_{jl}^{(2)}(t)$$

- Vi har altså at:

$$\begin{aligned}
P_{(0,0),(0,0)}(t) &= P_{00}^{(1)}(t) \cdot P_{00}^{(2)}(t) \\
P_{(1,0),(0,0)}(t) &= P_{10}^{(1)}(t) \cdot P_{00}^{(2)}(t) \quad (*) \\
P_{(0,1),(0,0)}(t) &= P_{00}^{(1)}(t) \cdot P_{10}^{(2)}(t)
\end{aligned}$$

- Produktregelen gir at

$$P'_{(0,0),(0,0)}(t) = P_{00}^{(1)'}(t) \cdot P_{00}^{(2)}(t) + P_{00}^{(1)}(t) \cdot P_{00}^{(2)'}(t)$$

- Baklengs Kolmogorov på (0,0) $\rightarrow$ (0,0) gir:

$$P'_{(0,0),(0,0)}(t) = \lambda_2 \cdot P_{(0,1),(0,0)}(t) + \lambda_1 \cdot P_{(1,0),(0,0)}(t) - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot P_{(0,0),(0,0)}(t)$$

- Setter vi inn (*), får vi:

$$\begin{aligned}
P'_{(0,0),(0,0)}(t) &= \lambda_2 \left[P_{00}^{(1)}(t) P_{10}^{(2)}(t)\right] + \lambda_1 \left[P_{10}^{(1)}(t) P_{00}^{(2)}(t)\right] - (\lambda_1 + \lambda_2) \left[P_{00}^{(1)}(t) P_{00}^{(2)}(t)\right] \\
&= \lambda_2 \left[P_{00}^{(1)}(t) P_{10}^{(2)}(t) - P_{00}^{(1)}(t) P_{00}^{(2)}(t)\right] + \lambda_1 \left[P_{10}^{(1)}(t) P_{00}^{(2)}(t) - P_{00}^{(1)}(t) P_{00}^{(2)}(t)\right] \\
&= P_{00}^{(1)}(t) \lambda_2 \left[P_{10}^{(2)}(t) - P_{00}^{(2)}(t)\right] + P_{00}^{(2)}(t) \lambda_1 \left[P_{10}^{(1)}(t) - P_{00}^{(1)}(t)\right] \quad (**)
\end{aligned}$$

- Baklengs Kolmogorov for en enkelt prosess, gir oss:

$$P_{00}^{(i)\prime}(t) = \lambda_i \left[P_{10}^{(i)}(t) - P_{00}^{(i)}(t) \right]$$

- Setter vi dette inn i (**) får vi

$$P'_{(0,0),(0,0)}(t) = P_{00}^{(1)}(t) P_{00}^{(2)\prime}(t) + P_{00}^{(1)\prime}(t) P_{00}^{(2)}(t),$$

  som er produktregelen.

- Tilsvarende kan gjøres for andre tilstander, og for forlengs Kolmogorov.

$\boxed{\text{Eksamen, jan.'99 oppg.4}}$

$$A(t) = \sum_{i=1}^{X(t)} Y_i$$

a)

$$\begin{aligned}
E[A(t)|X(t)=n] &= E[\sum_{i=1}^{n} Y_i] = \sum_{i=1}^{n} [E[Y_i] = \sum_{i=1}^{n} \mu = \underline{\underline{n \cdot \mu}} \\
E[A(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[A(t)|X(t)=n] \cdot Pr\{X(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mu \cdot Pr\{X(t)=n\} \\
&= \mu \cdot E[X(t)] = \mu \cdot \lambda t = \underline{\underline{\lambda \mu t}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
B(t) &= \sum_{i=1}^{X(t)} Y_i e^{\beta(t-W_i)} \\
E[B(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[B(t)|X(t)=n] \cdot Pr\{X(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{X(t)} Y_i e^{\beta(t-W_i)} | X(t)=n \right] \cdot Pr\{X(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i e^{\beta(t-W_i)} \right] \cdot Pr\{X(t)=n\} \\
&= \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} E[Y_i] \cdot E\left[e^{\beta(t-W_i)} \right] \right) \cdot Pr\{X(t)=n\} \right]}
\end{aligned}$$

Siden W_i er uniformfordelt på intervallet $[0,t]$, vil

$$\begin{aligned} E\left[e^{\beta(t-W_i)}\right] &= \int_0^t e^{\beta(t-w)} \cdot \frac{1}{t} dw \\ &= \left[-\frac{1}{\beta} e^{\beta(t-w)} \cdot \frac{1}{t}\right]_0^t \\ &= \underline{\frac{1}{\beta t}\left(e^{\beta t}-1\right)} \end{aligned}$$

dvs

$$\begin{aligned} E[B(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu \frac{1}{\beta t}\left(e^{\beta t}-1\right) \cdot Pr\{X(t)=n\} \\ &= \frac{\mu}{\beta t}\left(e^{\beta t}-1\right) \cdot E[X(t)] \\ &= \underline{\underline{\frac{\lambda\mu}{\beta}\left(e^{\beta t}-1\right)}} \end{aligned}$$

Eksamen, mai '02 oppg.2

a)

Alternativ parametrisering av Markov-prosessen:

ν_i: parameter i eksponential-fordeling for tid fra ankomst til tilstand i til prosessen forlater tilstand i igjen.

P_{ij}: sannsynlighet for å gå fra tilstand i til tilstand j, gitt at tilstand i skal forlates.

Sammenheng:

$$\nu_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} \quad , \quad P_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_{j\neq i} q_{ij}} \quad , \quad q_{ij} = \nu_i P_{ij}$$

b)

$$\begin{aligned} P_{10} &= \lim_{h\to 0} P\{X(t+h)=0 \mid X(t)=1, X(t+h)\neq 1\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{P\{X(t+h)=0, X(t+h)\neq 1 \mid X(t)=1\}}{P\{X(t+h)\neq 1 \mid X(t)=1\}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{P\{X(t+h)=0 \mid X(t)=1\}}{P\{X(t+h)=0 \mid X(t)=1\} + P\{X(t+h)=2 \mid X(t)=1\}} \\ &= \frac{\mu h + o(h)}{\mu h + o(h) + \sigma h + o(h)} = \frac{\mu + \frac{o(h)}{h}}{\mu + \frac{o(h)}{h} + \sigma + \frac{o(h)}{h}} \xrightarrow[h\to 0]{} \underline{\underline{\frac{\mu}{\mu+\sigma}}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\nu_i &= E\big[T \mid X(0)=i\big] \\
\\
\nu_2 &= 0 \\
\nu_1 &= \frac{1}{\mu+\sigma} + \frac{\mu}{\mu+\sigma}\nu_0 + \frac{\sigma}{\mu+\sigma}\nu_2 = \frac{1}{\mu+\sigma} + \frac{\mu}{\mu+\sigma}\nu_0 \quad (*) \\
\nu_0 &= \frac{1}{\lambda} + \nu_1 \quad (**)
\end{aligned}$$

Setter vi (*) inn i (**), får vi

$$\nu_0 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu+\sigma} + \frac{\mu}{\mu+\sigma}\nu_0,$$

som gir

$$\underline{\underline{\nu_0 = \frac{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu+\sigma}}{1 - \frac{\mu}{\mu+\sigma}}}}$$