

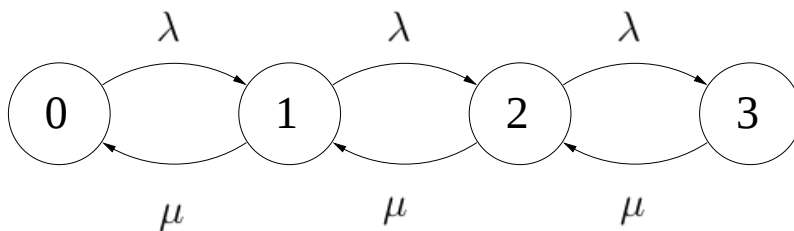


6.14

X_n = antall biler på bensinstasjonen.

$$\lambda = 20$$

$$\nu = \frac{1}{\frac{5}{60}} = 12$$



a) Andel tid med biler:

$$P_1 + P_2 + P_3 = \left[\frac{\lambda}{\nu} + \left(\frac{\lambda}{\nu} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\nu} \right)^3 \right] \cdot \left[1 + \frac{\lambda}{\nu} + \left(\frac{\lambda}{\nu} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\nu} \right)^3 \right]^{-1} = \underline{\underline{0.901}}$$

b) Andel kunder som går tapt = andel tid med full stasjon = $P_3 = \underline{\underline{0.460}}$

6.17

Dette er ved første øyekast ikke en fødsels- og dødsprosess

X_t – Maskiner som er feil

Bruker at

$$\text{Rate ut} = \text{Rate inn}$$

$$\lambda P_0 = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$$

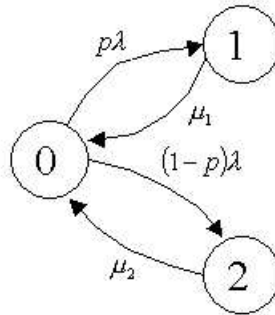
$$\mu_1 P_1 = p \lambda P_0$$

$$\mu_2 P_2 = (1 - p) \lambda P_0$$

De to siste ligningene gir:

$$P_1 = \frac{p \lambda}{\mu_1} \cdot P_0$$

$$P_2 = \frac{(1 - p) \lambda}{\mu_2} \cdot P_0$$



Dessuten er:

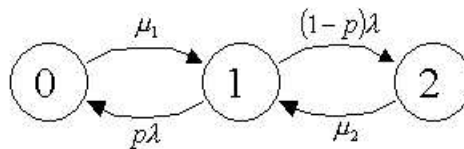
$$1 = P_0 + P_1 + P_2 = \left[1 + \frac{p\lambda}{\mu_1} + \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2}\right] \cdot P_0$$

Som gir:

$$\underline{\underline{P_0 = \left[1 + \frac{p\lambda}{\mu_1} + \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2}\right]^{-1}}}$$

Eventuelt kan en se på:

Vi får at:



$$P_0 = \frac{\mu_1}{p\lambda} \cdot P_1$$

$$P_2 = \frac{\mu_1}{p\lambda} \cdot \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2} \cdot P_1$$

$$\underline{\underline{P_1 = \left[1 + \frac{\mu_1}{p\lambda} + \frac{\mu_1}{p\lambda} \cdot \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2}\right]^{-1}}}$$

Sjekk at vi får samme svar!!

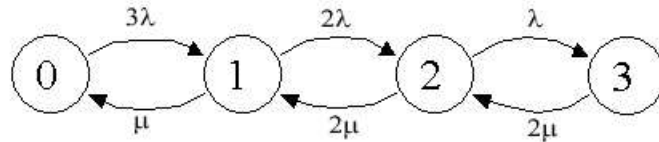
6.23

X = Antall maskiner som IKKE er i bruk

$$\lambda = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\mu = \frac{1}{8} = 0.125$$

a)



$$\begin{aligned}
 E[X] &= \frac{[0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{3\lambda}{\mu} + 2 \cdot 3 \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^2 + 3 \cdot \frac{3}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^3]}{[1 + 3\frac{\lambda}{\mu} + 3(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{3}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^3]} \\
 &= \frac{8.544}{6.088} = \underline{\underline{1.40}}
 \end{aligned}$$

b)

Andel tid begge er opptatt

$$\begin{aligned}
 &= P_2 + P_3 \\
 &= \frac{3(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{3}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^3}{6.088} \\
 &= \underline{\underline{0.44}}
 \end{aligned}$$

Eksamen, aug.'98 oppg.3

a)

De mulige tilstander for $X(t)$ er åpenbart $\{0,1,2\}$. Siden både reparasjonstiden og tid til neste feil er antatt eksponensialfordelte, vil sannsynligheten for en endring av tilstandsvektoren i tidsintervallet $(t, t+h)$ kun være avhengig av verdien ved tidspunkt t , $X(t)$, ikke tidligere historie. Pga. antatt uavhengighet mellom alle reparasjonstider og tider til neste feil, vil sanns. for to eller flere hendelser i et kort intervall av lengde h bli av størrelsesorden h^2 , dvs $o(h)$.

Fødselsintensiteter:

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= \lambda \\
 \lambda_1 &= \lambda \\
 \lambda_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Dødsintensiteter:

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 0 \\ \mu_1 &= \mu \\ \mu_2 &= 2\mu\end{aligned}$$

b)

Forover Kolmogorov-ligninger:

$$\begin{aligned}P'_{00}(t) &= -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t) \\ P'_{10}(t) &= -\lambda P_{10}(t) + \mu P_{11}(t) \\ P'_{20}(t) &= -\lambda P_{20}(t) + \mu P_{21}(t) \\ P'_{01}(t) &= \lambda P_{00}(t) - (\lambda + \mu)P_{01}(t) + 2\mu P_{02}(t) \\ P'_{11}(t) &= \lambda P_{10}(t) - (\lambda + \mu)P_{11}(t) + 2\mu P_{12}(t) \\ P'_{21}(t) &= \lambda P_{20}(t) - (\lambda + \mu)P_{21}(t) + 2\mu P_{22}(t) \\ P'_{02}(t) &= \lambda P_{01}(t) - 2\mu P_{02}(t) \\ P'_{12}(t) &= \lambda P_{11}(t) - 2\mu P_{12}(t) \\ P'_{22}(t) &= \lambda P_{21}(t) - 2\mu P_{22}(t)\end{aligned}$$

Skriver $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ for $i, j=0,1,2$

Har dessuten at $\lim_{t \rightarrow \infty} P'_{ij}(t) = 0$ Får da, ved å la $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}0 &= -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 \\ 0 &= \lambda\pi_0 - (\lambda + \mu)\pi_1 + 2\mu\pi_2 \\ 0 &= \lambda\pi_1 - 2\mu\pi_2\end{aligned}$$

Har dessuten at $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ som gir:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right)\pi_0 = 1 \\ \pi_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \\ \pi_1 &= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \\ \pi_2 &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}\end{aligned}$$

c)

Skriver $\theta = \frac{\lambda}{\mu}$ Forventet tap pr time med en reparatør: $\pi_0 \cdot (2\alpha) + \pi_1 \cdot \alpha = \underline{\underline{\frac{2\alpha(2+\theta)}{2+2\theta+\theta^2}}}$

Må finne en ny grensefordeling når en har to operatører. Fødsels- og dødsintensitetene blir nå:

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_0 &= 2\lambda \\
\tilde{\lambda}_1 &= \lambda \\
\tilde{\lambda}_2 &= 0 \\
\tilde{\mu}_0 &= 0 \\
\tilde{\mu}_1 &= \mu \\
\tilde{\mu}_2 &= 2\mu
\end{aligned}$$

som gir ligningene:

$$\begin{aligned}
2\lambda\tilde{\pi}_0 &= \mu\tilde{\pi}_1 \\
(\lambda + \mu)\tilde{\pi}_0 &= 2\lambda\tilde{\pi}_0 + 2\mu\tilde{\pi}_2 \\
2\mu\tilde{\pi}_2 &= \lambda\tilde{\pi}_1 \\
\tilde{\pi}_0 + \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 &= 1
\end{aligned}$$

Løser vi disse, får vi:

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_0 &= \frac{1}{1 + 2\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}} = \frac{1}{1 + 2\theta + \theta^2} \\
\tilde{\pi}_1 &= \frac{2\frac{\lambda}{\mu}}{1 + 2\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}} = \frac{2\theta}{1 + 2\theta + \theta^2}
\end{aligned}$$

Ved å innføre en ekstra reparatør, innføres også en ekstra utgift på β kroner per time. Forventet tap per time med to reparatører blir dermed:

$$\begin{aligned}
\beta + 2\alpha\tilde{\pi}_0 + \alpha\tilde{\pi}_1 &= \beta + \frac{2\alpha}{1 + 2\theta + \theta^2} + \frac{2\alpha\theta}{1 + 2\theta + \theta^2} \\
&= \beta + \frac{2\alpha(1 + \theta)}{(1 + \theta)^2} = \beta + \frac{2\alpha}{(1 + \theta)}
\end{aligned}$$

Ved å sette forventet tap med en reparatør lik forventet tap med to reparatører, får vi,

$$\frac{2\alpha(2 + \theta)}{2 + 2\theta + \theta^2} = \beta + \frac{2\alpha}{(1 + \theta)}, \quad (1)$$

som ved litt manipulasjon blir til

$$\underline{\underline{\beta\theta^3 + 3\beta\theta^2 + (4\beta - 2\alpha)\theta + 2\beta = 0}} \quad (2)$$

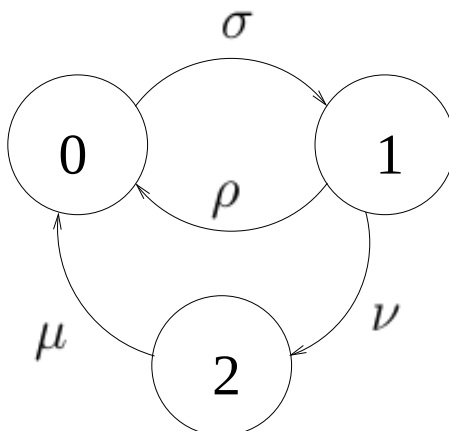
For å finne ut for hvilke θ det vil lønne seg å innføre en ekstra reparatør for, kan vi se på den andrederiverte til venstresiden av (??). Intuitivt kan vi si at det vil lønne seg å ha to reparatører dersom maskinene ofte går i stykker. Altså når $\theta > 12.57$. Videre vil det også lønne seg å ha to reparatører dersom det tar veldig lang tid å reparere en maskin i forhold til hvor ofte de går i stykker. Altså når $\theta < 0.0102$.

Ligningen (??) er funnet ved å trekke ventresiden i (??) fra høyresiden. Altså vil ei en θ -verdi som gjør

$$\beta\theta^3 + 3\beta\theta^2 + (4\beta - 2\alpha)\theta + 2\beta \quad (3)$$

negativ si at det lønner seg med kun en reparatør. Den dobbeltderiverte er $6\beta(1+\theta)$. Denne er positiv for alle $\theta > 0$, noe som vil si at vi har et bunnpunkt mellom $\theta = 0.0101$ og $\theta = 12.57$. Uttrykket (??) er dermed positivt for $0 < \theta < 0.0102$ og $\theta > 12.57$ (som antatt).

Eksamen, mai '01 oppg.1



- a) At $X(t)$ modelleres ved hjelp av en Markovkjede betyr at gitt tilstanden i nåtiden ($X(t) = i$), så er framtidige tilstander uavhengig av tilstanden før tid t .

Gitt $X(t) = 0$. Da er

$$P(\text{ventetid i "0" er } \geq s - t) = e^{-(\mu+\sigma)(s-t)}$$

da spørsmålet kan formuleres som den første hendelsen av to uavhengige poisson-prosesser.

- b) Chapman-Kolmogorov ligningen for $P_{00}(t+h)$ er

$$\begin{aligned} P_{00}(t+h) &= \sum_{j=0}^2 P_{0j}(t)P_{j0}(h) \\ &= P_{00}(t) \cdot (1 - (\mu + \sigma)h) + P_{01}(t) \cdot \rho h + P_{02}(t) \cdot 0 + o(h) \end{aligned}$$

dvs.

$$\frac{P_{00}(t+h) - P_{00}(t)}{h} = -(\mu + \sigma)P_{00}(t) + \rho P_{01}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Ved å la h gå mot 0, ser vi at

$$P'_{00}(t) = -(\mu + \sigma)P_{00}(t) + \rho P_{01}(t)$$

Videre

$$\begin{aligned} P_{01}(t+h) &= \sum_{j=0}^2 P_{0j}(t)P_{j1}(h) \\ &= P_{00}(t) \cdot \sigma h + P_{01}(t) \cdot (1 - (\rho + \nu)h) + P_{02}(t) \cdot 0 + o(h) \end{aligned}$$

dvs.

$$\frac{P_{01}(t+h) - P_{01}(t)}{h} = \sigma P_{00}(t) - (\rho + \nu)P_{01}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Når h går mot 0, ser vi at

$$P'_{01}(t) = \sigma P_{00}(t) - (\rho + \nu)P_{01}(t)$$

som skulle vises.

- c) Gitt at $\rho = 0$. Antar også at $X(0) = 0$. Ønsker å finne $P_{00}(t)$. Den første ligningen i forrige deloppgave gir nå

$$P'_{00}(t) = -(\mu + \sigma)P_{00}(t)$$

dvs.

$$P_{00}(t) = Ce^{-(\mu+\sigma)t}$$

ved hjelp av standard differetialligningsteknikker. Siden $P_{00}(0) = 1$ blir $C = 1$. Den andre ligningen i forrige punkt gir

$$P'_{01}(t) = \sigma e^{-(\mu+\sigma)t} - \nu P_{01}(t)$$

dvs

$$P'_{01}(t) + \nu P_{01}(t) = \sigma e^{-(\mu+\sigma)t}$$

Vi vet at $P_{01}(0) = 0$. Fra den siste formelen i den utdelte formelsamlinga ser vi at

$$\begin{aligned} P_{01}(t) &= \int_0^t e^{-\nu(t-s)} \sigma e^{-(\mu+\sigma)s} ds \\ &= \sigma e^{-\nu t} \int_0^t e^{(\nu-\mu-\sigma)s} ds \\ &= \sigma e^{-\nu t} \frac{1}{\nu - \mu - \sigma} \left[e^{(\nu-\mu-\sigma)t} - 1 \right] \\ &= \frac{\sigma}{\nu - \mu - \sigma} \left[e^{-(\mu+\sigma)t} - e^{-\nu t} \right] \end{aligned}$$

- d) Gitt at $X(0) = 0$. Ønsker å finne $E(T|X(0) = 0)$. La $m_i = E(T|X(0) = i)$. Fra vink har vi at

$$m_i = \sum_{j \neq i} E(T|X(0) = i \cap \text{første overgang er til } j) \cdot P(\text{første overgang er til } j)$$

Dermed blir

$$\begin{aligned} m_0 &= E(T|X(0) = 0 \cap \text{første overgang er til 1}) \cdot P(\text{første overgang er til 1}) \\ &+ E(T|X(0) = 0 \cap \text{første overgang er til 2}) \cdot P(\text{første overgang er til 2}) \\ &= \left(\frac{1}{\mu + \sigma} + m_1 \right) \cdot \frac{\sigma}{\mu + \sigma} \\ &= \frac{1}{\mu + \sigma} + \frac{\sigma}{\mu + \sigma} \cdot m_1 \end{aligned}$$

Tilsvarende blir

$$m_1 = \frac{1}{\nu + \rho} + \frac{\rho}{\nu + \rho} \cdot m_0$$

Løser ut for m_0 og får

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{\mu + \sigma} + \frac{\sigma}{\mu + \sigma} \left(\frac{1}{\nu + \rho} + \frac{\rho}{\nu + \rho} \cdot m_0 \right) \\ &\quad \Downarrow \\ m_0 \left(1 - \frac{\sigma\rho}{(\mu + \sigma)(\nu + \rho)} \right) &= \frac{1}{\mu + \sigma} + \frac{\sigma}{(\mu + \sigma)(\nu + \rho)} \end{aligned}$$

Multipliserer begge sidene med $(\mu + \sigma)(\nu + \rho)$:

$$\begin{aligned} m_0((\mu + \sigma)(\nu + \rho) - \sigma\rho) &= \nu + \rho + \sigma \\ m_0 &= \frac{\nu + \rho + \sigma}{(\mu + \sigma)(\nu + \rho) - \sigma\rho} = \frac{\nu + \rho + \sigma}{\mu\nu + \sigma\nu + \mu\rho} \end{aligned}$$