Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 11

8.1

M/M/I

- X_i = antall ankomne i løpet av tid t $\sim$ Poisson(λt), $E[X_t] = \lambda t$
- S = servicetid $\sim exp(\mu)$, $E[S] = \frac{1}{\mu}$

a)

$$E[X_s] = \int_0^\infty E[X_s|S=s]\cdot f_s(s)\,ds = \int_0^\infty \lambda s \cdot f_s(s)\,ds = \lambda \cdot E(S) = \underline{\underline{\frac{\lambda}{\mu}}}$$

b)

$$\begin{aligned} Pr\{X_s = 0\} &= \int_0^\infty Pr\{X_s = 0|S=s\}\cdot f_s(s)\,ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\mu e^{-\mu s}\,ds \\ &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\int_0^\infty (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)s}\,ds = \underline{\underline{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}} \end{aligned}$$

8.4

M/M/I

- W_Q^* - Tid en kunde står i køen
- W^* - Tid en kunde er i systemet (kø + service) $\sim exp(\mu - \lambda)$ (Se s. 437-438)
- N - Antall i systemet når kunden ankommer $\approx geometr(\frac{\lambda}{\mu})$ (Se s. 438)
  $\Rightarrow W_Q^*|N = n \quad \sim \quad W^*|N = n-1, \quad n \geq 1$

$$\begin{aligned} P(W_Q^* \leq x) &= P(W_Q^* \leq x \mid N = 0)\cdot P(N=0) + P(W_Q^* \leq x \mid N > 0)\cdot P(N > 0) \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + P(W^* \leq x)\cdot \frac{\lambda}{\mu} \\ &= \underline{\underline{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - e^{-(\mu-\lambda)x}\right)}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{8.7}}$

Se boka s. 673

$\boxed{\text{Eksamen, mai '02 oppg.3}}$

a)

For $k \leq N-1$:	Potensielle nye kunder ankommer med intensitet λ, og enhver slik kunde vil gå inn i køsystemet. Det vil si at $\lambda_k = \lambda$.
For $k = N$:	Eventuelle potensielle nye kunder vil gå forbi, det vil si $\lambda_k = 0$.
For $k = 1, 2, \ldots, N$:	Kunden under behandling er ferdig med intensitet μ, men gitt at hun er ferdig vil hun kun forlate køsystemet med sannsynlighet p. Intensitet for å forlate køsystemet blir dermed $\mu_k = p\mu$.
For $k = 0$:	Ingen kunder i køsystemet, og dermed kan ingen forlate det. Det vil si at $\mu_0 = 0$.

$X(t)$ blir en fødsels- og dødsprosess fordi kunder forlater og ankommer køsystemetmed intensiteter som kun avhenger av nåværende tilstand, ikke historien.

b)

$$\theta_k = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_1 \ldots \mu_k} = \frac{\lambda^k}{(p\mu)^k} = \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{N} \theta_k = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}}{1 - \frac{\lambda}{p\mu}}$$

$$\underline{\underline{P_i = \frac{\theta_i}{\sum_{k=0}^{N} \theta_k} = \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^i \frac{1 - \frac{\lambda}{p\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}}}}$$

Her er $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $p = 0.9$ og $N = 20$, slik at

$$P_i = \left(\frac{9}{0.9 \cdot 11}\right)^i \frac{1 - \frac{9}{0.9 \cdot 11}}{1 - \left(\frac{9}{0.9 \cdot 11}\right)^{21}} = \underline{\underline{0.105\big(0.909\big)^i}}$$

Andel kuner som går forbi:

$$P_N = \frac{\theta_i}{\sum_{k=0}^{N} \theta_k} = \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^i \frac{1 - \frac{\lambda}{p\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}} = \underline{\underline{0.0156}}$$

Andel kunder som går direkte til behandling:

$$P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{p\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}} = \underline{\underline{0.105}}$$

c)

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{i=0}^{N} iP_i = \sum_{i=0}^{N} i\left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^i \frac{1 - \frac{\lambda}{p\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}} \\
&= \frac{1 - \frac{\lambda}{p\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}} \cdot \frac{\frac{\lambda}{p\mu} + \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}\left(N\frac{\lambda}{p\mu} - N - 1\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{p\mu}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{p\mu} + \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}\left(N\frac{\lambda}{p\mu} - N - 1\right)}{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{p\mu}\right)} = \underline{\underline{6.719}}
\end{aligned}$$

Littles formel:

$$L = \lambda_a W \Rightarrow W = \frac{L}{\lambda_a}$$

Her er $\lambda_a = \lambda\left(1 - P_n\right)$, slik at gjennomsnittlig total tid hver kunde tilbringer i systemet blir:

$$W = \frac{L}{\lambda\left(1 - P_n\right)} = \underline{\underline{0.756}}$$

La T være total tid i køsystemet for en person som gjennomgår (nøyaktig) en behandlig.

Betinger på N (antal kunder i køsystemet når "vår" person ankommer). N har sannsynlighetsfordeling

$$P\{N = n\} = \frac{P_n}{1 - P_N}\ , n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

$$\begin{aligned}
E[T] &= \sum_{n=0}^{N-1} E[T \mid N = n] \cdot P\{N = n\} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n+1}{\mu} P\{N = n\} = \frac{1}{\mu} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n}{\mu} \frac{P_n}{1 - P_N} \\
&= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \sum_{n=0} N - 1n \frac{\left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{p\mu}\right)}{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1} - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^N \left(1 - \frac{\lambda}{p\mu}\right)} \\
&= \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{p\mu}\right)}{1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1} - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^N \left(1 - \frac{\lambda}{p\mu}\right)} \cdot \frac{\frac{\lambda}{p\mu} + \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^N \left((N-1)\frac{\lambda}{p\mu} - N - 2\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{p\mu}\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{\frac{\lambda}{p\mu} + \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^N \left((N-1)\frac{\lambda}{p\mu} - N - 2\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{p\mu}\right)\left(1 - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^{N+1} - \left(\frac{\lambda}{p\mu}\right)^N \left(1 - \frac{\lambda}{p\mu}\right)\right)}\right] = \underline{\underline{0.333}}
\end{aligned}$$

$(*)$ fordi $E[T \mid N = n]$ er gammafordelt, med forventning $\frac{n+1}{\mu}$.