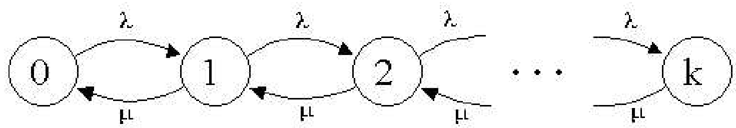
TMA4265 Stokastiske prosesser
Våren 2004

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 12

8.9

Vi ser på dette som eit M/M/1 system der varene utgjør køen og kundene står for servicen.
X_t = antall varer på hylla.



a) Andel som går bort tomhendte = P_0

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + ... + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}} \qquad \text{(Se s. 440)}$$

b) Snittid en vare står på hulla. (antar FIFI-prinsippet)

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{L}{\lambda(1 - P_k)}$$

(for L se neste punkt)

c) Snittantall varer:

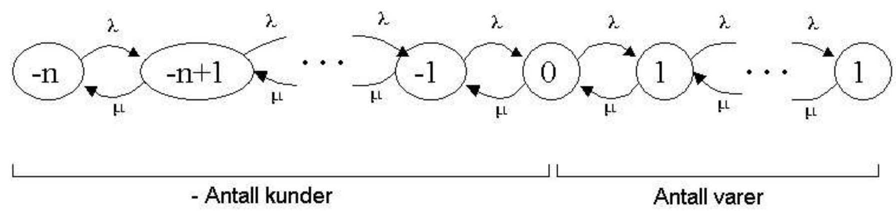
$$L = \sum_{n=0}^{k} nP_n = \frac{\sum_{n=0}^{k} n(\frac{\lambda}{\mu})^n}{\sum_{n=0}^{k}(\frac{\lambda}{\mu})^n} = \frac{\lambda\left[1 + k(\frac{\lambda}{\mu})^{k+1} - (k+1)(\frac{\lambda}{\mu})^k\right]}{(\mu - \lambda)\left[1 - (\frac{\lambda}{\mu})^{k+1}\right]} \qquad \text{Se s. 440)}$$

d) Vi ser på systemet der utfallsrommet er slik at $-n \leq j \leq k$

slik at når:

$j \leq 0 \rightarrow -j$ antall kunder i kø og 0 varer.

$j \geq 0 \rightarrow j$ antall varer i hyllene og 0 kunder i kø.



Balanselikningene blir:

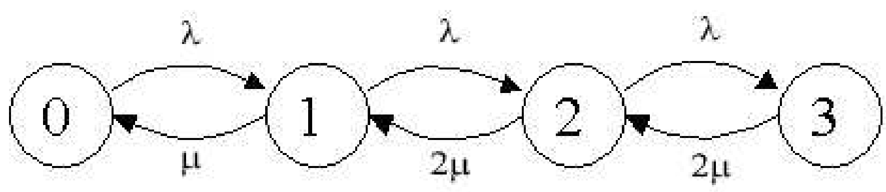
$$
\begin{aligned}
\mu P_k &= \lambda P_{k-1} \\
(\lambda+\mu)P_j &= \lambda P_{j-1} + \mu P_{j+1} \qquad -n < j < k \\
\lambda P_{-n} &= \mu P_{-n+1} \\
1 &= \sum_{j=-n}^{k} P_j
\end{aligned}
$$

e) Snitt-antall kunder i kø X blir da:

$$E[X] = \sum_{j=-n}^{1} -jP_j + \sum_{j=0}^{k} 0 \cdot P_j = \underline{\underline{-\sum_{j=-n}^{1} jP_j}}$$

$\boxed{8.18}$

Vi har følgende køsystem:



a) X_n = Antall i systemet $\qquad \Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

b) Grensesannsynligheten blir fra figuren, siden dette er en fødsels- og dødsprosess:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \left[1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\right]^{-1}\\
P_1 &= \frac{\lambda}{\mu}P_0\\
P_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0\\
P_3 &= \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0
\end{aligned}$$

c) La N være antallet kunder i systemet når en ny kunde ankommer. Forventet tid i systemet blir da betinget på $N = 2$.

$$\begin{aligned}
E\,[\,W^*\,|\,N=2\,] &= E\,[\,\text{Tid i kø}\,|\,N=2\,]+E\,[\,\text{Servicetid}\,]\\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{\mu}}}
\end{aligned}$$

d) Andel potensielle kunder som kommer inn i systemet $= \underline{\underline{1-P_3}}$.

e) *Alternativ 1:*

$$\begin{aligned}
W=E\,[\,W^*\,] &= \sum_{n=0}^{2} E\,[\,W^*\,|\,N=n\,]\cdot P(N=n)\\
&= \sum_{n=0}^{2} E\,[\,W^*\,|\,N=n\,]\,\frac{P_n}{1-P_3}\\
&\quad \text{(Betinger på at kunden går inn i systemet, dvs. } N\le 2\text{)}\\
&= \underline{\underline{\frac{1}{1-P_3}\left[\frac{1}{\mu}(P_0+P_1)+\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{2\mu}\right)P_2\right]}}
\end{aligned}$$

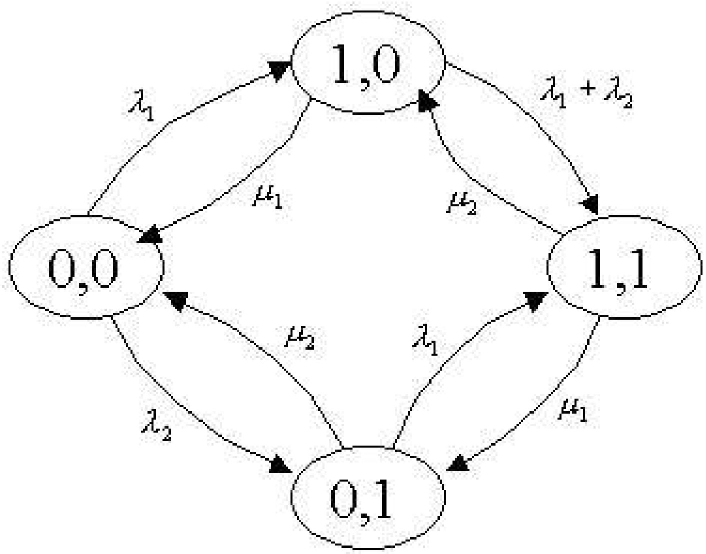
Alternativ 2:

$$W=E\,[\,W^*\,]=\frac{L}{\lambda_a}$$

$$\left[\begin{array}{c} L=E\,[\,X\,]\;=\sum_{k=0}^{3}kP_k\\ \lambda_a=\lambda(1-P_3)\end{array}\right]$$

8.20

a) X = Antall kunder ved hver av serverene; $\Omega = \{(0,0),(1,0),(0,1)(1,1)\}$
Systemet følger da



b) Dette er *ikke* en fødsels- og dødsprosess, så her må vi tilbake til balanseligningene for å kunne løse systemet:

$$\begin{aligned}
\text{Rate UT} &= \text{Rate INN} \\
(\lambda_1+\lambda_2)P_{00} &= \mu_1 P_{10} + \mu_2 P_{01} \\
(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P_{10} &= \lambda_1 P_{00} + \mu_2 P_{11} \\
(\lambda_1+\mu_2)P_{01} &= \lambda_2 P_{00} + \mu_1 P_{11} \\
(\mu_1+\mu_2)P_{11} &= (\lambda_1+\lambda_2)P_{10} + \lambda_1 P_{01} \\
\text{og} & \\
P_{00}+P_{10}+P_{01}+P_{11} &= 1
\end{aligned}$$

c) $L = \underline{\underline{P_{10} + P_{01} + 2P_{11}}}$

d)

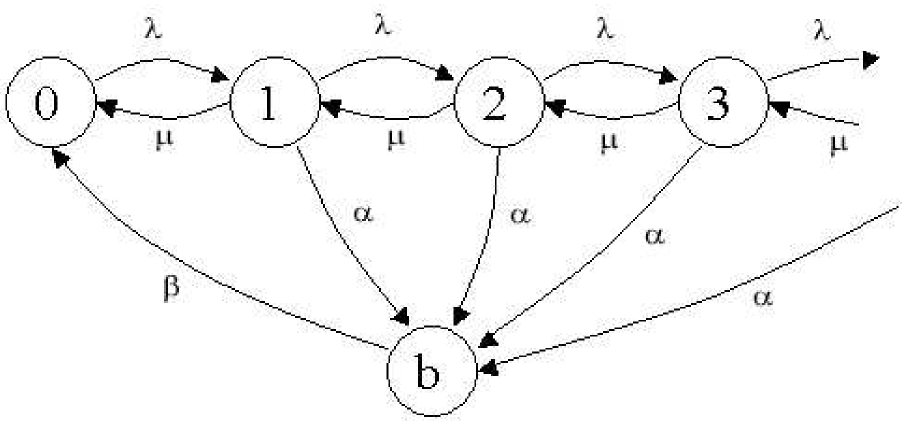
$$W = \frac{L}{\lambda_a} = \underline{\underline{\frac{L}{\lambda_1(1-P_{11}) + \lambda_2(P_{00}+P_{10})}}}$$

$\boxed{8.21}$

Se boka s. 675

$\boxed{8.23}$

a) $\Omega = \{\, b,\, n \,|\, n \geq 0 \,\}$ der b er sammenbrudd og n er antall i systemet.
Systemet følger figur **??**.



Figur 1: Oppgave 8.23

b) Dette er *ikke* en fødsels- og dødsprosess, og vi får balanselikningene

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= \mu P_1 + \beta P_b \\ (\lambda + \mu + \alpha) P_n &= \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \qquad n \geq 1 \\ \beta P_b &= \alpha \left[1 - (P_0 + P_b)\right] \end{aligned}$$

c)

$$W = \frac{L}{\lambda_a} = \underline{\underline{\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_n}{\lambda(1 - P_b)}}}$$

d) *Alternativ 1:*

Total servicerate $\mu_s = \mu(1 - P_0 - P_b)$.
Andel kunder som fullfører =

$$\frac{\text{Total servicerate}}{\text{Total ankomstrate}} = \frac{\mu_s}{\lambda_a} = \underline{\underline{\frac{\mu(1 - P_0 - P_b)}{\lambda(1 - P_b)}}}$$

Alternativ 2:

Betinger på antall N i systemet ved ankomst:

$$\begin{aligned}
\Pr\{\,\text{fullfører}\,\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{\,\text{Alle } N+1 \text{ fullfører før breakdown} \,|\, N=n\,\} \cdot \frac{\Pr\{\,N=n\,\}}{1-P_b} \\
&= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu+\alpha}\right)^{n+1} \frac{P_n}{1-P_b}}}.
\end{aligned}$$

e) Andel potensielle kunder som ankommer under et sammenbrudd = $\underline{\underline{P_b}}$.

8.37

a) Vi ønsker å finne d_0 (jevnfør defininsjonen på side 430). I følge **Proposition 8.1** så er i vårt tilfelle $d_0 = a_0$, samtidig som $a_0 = P_0$ i følge **Proposition 8.2**. Svaret er altså P_0.

b) Forventet arbeid i systemet ved avgang

$$\begin{aligned}
&= E[\,\text{Antall ved avgang}\,] \cdot E[\,S\,] \\
&= E[\,\text{Antall ved ankomst}\,] \cdot E[\,S\,] \\
&= L \cdot E[\,S\,] \\
&= \lambda W \cdot E[\,S\,] \\
&= \lambda(W_Q + E[\,S\,]) \cdot E[\,S\,] \\
&= \underline{\underline{\frac{\lambda^2 E[\,S^2\,] E[\,S\,]}{2(1-\lambda E[\,S\,])} + \lambda(E[\,S\,])^2}}
\end{aligned}$$

Eksamen, aug '99 oppg.3

NB!! I denne oppgaven er kø og køsystem det samme (L_Q er IKKE definert i pensumet) $\Rightarrow$ Med kø menes køsystem.

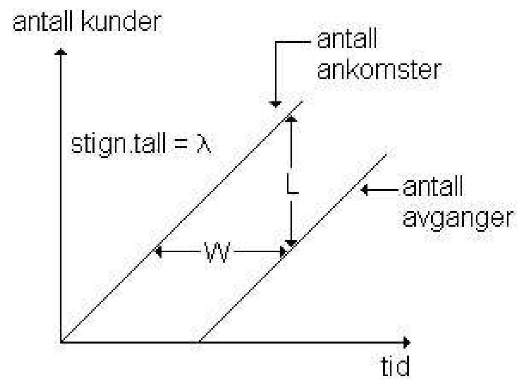
a)

$$Pr\{X(\tfrac{1}{2}) \le 5\} = \sum_{k=0}^{5} \frac{(\lambda \cdot \frac{1}{2})^k}{k!} e^{-\lambda \cdot \frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{5} \frac{10^k}{k!} e^{-10} = \underline{\underline{0.067}}$$

$$\begin{aligned}
Pr\{X(1) \le 10 \mid X(\tfrac{1}{2}) = 5\} &= Pr\{X(1) - X(\tfrac{1}{2}) \le 5 \mid X(\tfrac{1}{2}) = 5\} \\
&= Pr\{X(1) - X(\tfrac{1}{2}) \le 5\} \\
&= Pr\{X(\tfrac{1}{2}) \le 5\} = \underline{\underline{0.067}}
\end{aligned}$$

Køformelen: $L = \lambda \cdot W$ der
L: forventet antall i kø
λ: ankomstrate
W: forventet tid i kø

Forklarende figur:



Ved likevekt må (gjennomsnittlig) antall ankomster være lik (gjennomsnittlig) antall avganger. Dette gir at $L = \lambda \cdot W$.

b)

Grunnfordelingen er gitt ved:

$$\pi_k = \theta_k \cdot \pi_0 \quad \text{der} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} \quad \text{og} \quad \pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k}$$

$$\theta_k = \frac{\lambda^k}{(\mu p)^k} = \left(\frac{\lambda}{\mu p}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu p}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu p}} \quad \text{hvis} \quad \frac{\lambda}{\mu p} < 1$$

dvs.

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu p}$$

$$\pi_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu p}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu p}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

forutsatt at $\frac{\lambda}{\mu p} < 1$, hvis ikke vil antall personer vokse over alle grenser.

c)

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(1 - \frac{\lambda}{\mu p}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu p}\right)^k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu p}\right) \cdot \frac{\frac{\lambda}{\mu p}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu p}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{\frac{\lambda}{\mu p}}{1-\frac{\lambda}{\mu p}}}}$$

$$L = \lambda \cdot W \quad \Rightarrow \quad W = \frac{L}{\lambda}$$
$$W = \frac{\frac{1}{\mu p}}{1 - \frac{\lambda}{\mu p}} = \underline{\underline{\frac{1}{\mu p - \lambda}}}$$

d) La N være antall behandlinger en kunde gjennomgår før han forlater køsystemet. Fra situasjonen er det klart at N er geometrisk fordelt med parameter p, dvs $E[N] = \frac{1}{p}$. La U være total tid en kunde bruker i køsystemet og la T_i være tiden han benytter for i'te gjennomgang slik at $U = \sum_{k=1}^{N} T_i$

$$\begin{aligned} W = E[U] &= \sum_{n=1}^{\infty} E[U|N=n] \cdot Pr\{N=n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} T_i\right] \cdot Pr\{N=n\} \\ &= \sum_{n-1}^{\infty} nE[T_i] \cdot Pr\{N=n\} \\ &= E[T_i] \cdot E[N] \\ &= \underline{\frac{E[T_i]}{p}} \end{aligned}$$

Har at $T_i = \sum_{j=0}^{x(t)} W_j$ der $x(t)$ er antall kunder i kø i det vår kunde stiller seg bakerst i køen for i'te gang, og $W_1, ..., W_{x(t)}$ er behandlingstidenen for kundenen foran i køen og W_0 er behandlingstid for vår kunde. Får da:

$$\begin{aligned} E[T_i] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[T_i|x(t)=k] \cdot Pr\{x(t)=k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)E[W_j] \cdot Pr\{x(t)=k\} \\ &= E[W_j]\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\pi_k \\ &= E[W_j](\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k + 1) \\ &= E[W_j](L+1) \\ &= \frac{1}{\mu}(\frac{\frac{\lambda}{\mu p}}{1-\frac{\lambda}{\mu p}} + 1) \\ &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu p}} \end{aligned}$$

$$W = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\lambda}{\mu p} = \underline{\underline{\frac{1}{\mu p - \lambda}}}$$

Om kunden skal ha ny behandling kommer først i køen vil dette ikke forandre resultatene foran fordi fødsels- og dødsintensitetene blir uforandret og i utregning av L ble ikke noen antagelse angående kø-ordning benyttet. Dermed vil også kø-formelen gi samme svar for W.