8.39

Se side 676 i læreboka

8.50

Fra delkapittel **8.9.2** har vi at M/M/k - systemet har følgende grensesannsynlighet

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{\frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} + \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \frac{k\mu}{k\mu-\lambda}} & i \le k \\ \dfrac{\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^i k^k}{k!} P_0 & i > k \end{cases} \qquad \lambda < \mu k$$

a) Pr{ En ny kunde finner alle serverene opptatt } = Pr{ $X \ge k$ }

$$= \sum_{i=k}^{\infty} P_i = \cdots = \underline{\underline{\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu-\lambda}}{k! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu-\lambda}}}}$$

b) $L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$ gir vanskelig regning. Derimot kan vi beregne

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=k}^{\infty} (n-k) P_n \\ &= P_0 \sum_{n=k}^{\infty} (n-k) \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{\lambda}{\mu k}\right)^{n-k} \\ &= P_0 \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} (n-k) \left(\frac{\lambda}{\mu k}\right)^{n-k} \\ &= P_0 \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{\frac{\lambda}{k\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu k}\right)^2} \end{aligned}$$

Bruker så at $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$, og får dermed at

$$W = W_q + E[\,S\,] = \underline{\underline{\frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu}}}$$

og

$$L = \lambda W = \underline{\underline{L_q + \frac{\lambda}{\mu}}}$$

$\boxed{10.1}$

Se appendiks i læreboka

$\boxed{10.2}$

Har at

$$\begin{aligned}
&\{X(s) - A \mid X(t_1) = A,\ X(t_2) = B\} && t_1 < s < t_2 \\
&\stackrel{d}{=} \{X(s - t_1) | X(0) = 0, X(t_2 - t_1) = B - A\} && d = samme\ fordeling \\
&\sim N\left(\frac{s - t_1}{t_2 - t_1}(B - A),\ \frac{s - t_1}{t_2 - t_1}(t_2 - s)\right) && (Se\ side\ 552)
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\{X(s) \mid X(t_1) = A,\ X(t_2) = B\}$$
$$\underline{\underline{\sim N\left(A + \frac{s - t_1}{t_2 - t_1}(B - A),\ \frac{s - t_1}{t_2 - t_1}(t_2 - s)\right)}}$$

$\boxed{10.5}$

Se appendiks i læreboka

$\boxed{10.9}$

Vi har at

$$X(s) = x,\ \ X(t) = y \iff X(s) = x,\ \ X(t) - X(s) = y - x$$

Siden vi har uavhengige inkrementer får vi at simultanfordelingen blir

$$f_{s,t}(x, y) = \underline{\underline{f_s(x) \cdot f_{t-s}(y - x)}}$$

$$\left[\begin{array}{lcl} f_s(x) & = & N(s\mu,\ s\sigma^2) \\ \\ f_{t-s}(z) & = & N((t - s)\mu,\ (t - s)\sigma^2 \end{array}\right]$$

$\boxed{10.10}$

Se appendiks i boka

Eksamen, mai '01 oppg.3

a) Definisjon av brownsk bevegelse:

1. $B(0) = 0$
2. $\{B(t), t \geq 0\}$ har stasjonære og uavhengige inkrementer (differanser)
3. For alle $t > 0$ så er $B(t)$ normalfordelt med forventning 0 og varians $\sigma^2 t$

Ut fra forutsetningene vet vi at $B(2) \sim \mathbf{N}(0, 2)$. Dermed har vi at

$$\begin{aligned} P(B(2) \geq 3) &= 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.12) \\ &= \underline{\underline{0.017}} \end{aligned}$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned} P(B(2) \geq 3 | B(1) = 1) &= P(B(2) - B(1) \geq 2) \\ &= 1 - \Phi(2) = \underline{\underline{0.023}}, \end{aligned}$$

der den andre overgangen skyldes uavhenige inkrementer og den tredje skyldes at $B(2) - B(1)$ er normalfordelt med forventning 0 og varians $2 - 1 = 1$, altså standard normalfordelt.

b) Skal finne $P(T_3 \leq 2)$. Ut fra tipset ønsker vi å gå ut fra $P(B(2) \geq 3)$. Bruker loven om total sannsynlighet:

$$\begin{aligned} P(B(2) \geq 3) &= P(B(2) \geq 3 | T_3 \leq 2) \cdot P(T_3 \leq 2) \\ &\qquad + P(B(2) \geq 3 | T_3 > 2) \cdot P(T_3 > 2) \\ &= 1/2 \cdot P(T_3 \leq 2) \end{aligned}$$

$P(B(2) \geq 3 | T_3 \leq 2) = 1/2$ fordi gitt at prosessen har vært i tilstand 3 i tidsrommet $[0, 2]$, så er sannsynligheten for at prosessen er over tilstand 3 ved tidspunkt 2 lik sannsynligheten for at den er under tilstand 3, altså en halv. $P(B(2) \geq 3 | T_3 > 2) = 0$ hvis man bare tenker seg litt om. Dermed har vi at

$$P(T_3 \leq 2) = 2 \cdot P(B(2) \geq 3) = 2 \cdot 0.017 \underline{\underline{= 0.034}}$$