



Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:

Arvid Næss 73 59 70 53/ 99 53 83 50

EKSAMEN I EMNE TMA4285 TIDSREKKER OG FILTERTEORI

15. desember 2004

Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formel i statistikk*, Tapir Forlag

K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Kalkulator HP30S

Ett gult A5-ark med stempel med egne formel og notater

Sensuren faller: 12. januar 2005

NB: Alle svar skal begrunnes.

Notasjon brukt i dette oppgavesettet:

- Z_t er hvit støy med varians σ^2 , dvs. $Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.
- B er *backshift*-operatoren, slik at $B^j X_t \equiv X_{t-j}$, $j \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- ACVF = autokovarians-funksjon, ACF = autokorrelasjons-funksjon.

Oppgave 1

Anta at tidsrekken X_t er en $\text{ARMA}(p, q)$ -prosess definert ved

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

hvor AR-polynomet $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$, og MA-polynomet $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$.

a) Hvilke betingelser er oppfylt når X_t er en $\text{ARMA}(p, q)$ -prosess? Diskutér spesielt hvilke krav som må stilles til AR- og MA-polynomene.

b) Hva betyr det at X_t er en kausal tidsrekke, og hvordan kan det uttrykkes? Hva med invertibel?

Hvilke krav må stilles til AR- og MA-polynomene for å sikre at X_t skal være både kausal og invertibel?

La ϕ og θ betegne reelle konstanter. Tidsrekken X_t definert i ligning (1), skal nå spesialiseres til følgende modell:

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1} + 0.5 Z_{t-2}; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (2)$$

c) For hvilke verdier av ϕ og θ er X_t både kausal og invertibel?

d) Bestem $\text{MA}(\infty)$ -representasjonen av X_t når den er kausal, og verifiser at kravet for konvergens er oppfylt.

Oppgave 2

La ϕ betegne en reell konstant, og anta at $|\phi| < 1$. Betrakt tidsrekken X_t definert som følger:

$$X_1 = Z_1 \quad (3)$$

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t; \quad t = 2, 3, \dots \quad (4)$$

a) Bestem middelvei og varians til X_t for $t = 1, 2, \dots$, og vis at

$$\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma^2 \phi^h \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2}$$

for $t \geq 1$ og $h \geq 0$.

Er X_t en stasjonær tidsrekke?

- b) Argumentér for at X_t kan betraktes som stasjonær for store verdier av t . Beskriv deretter hvordan du rent praktisk kan bruke dette til å simulere n observasjoner av en stasjonær Gaussisk AR(1)-modell ut fra simulerte verdier fra en IID $N(0, 1)$ -prosess, dvs. uavhengig, identisk fordelt Gaussisk hvit støy med varians lik 1.0.

- c) Anta at den første ligningen erstattes med

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \phi^2}} Z_1 \quad (5)$$

Er den resulterende tidsrekken stasjonær?

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi anta at $Z_t \sim \text{IID } N(0, \sigma^2)$. La tidsrekken Y_t være en kausal ARMA(1,1)-prosess gitt ved

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1}; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (6)$$

hvor det antas at $\phi > 0$.

- a) Bestem ligningene som ACVF $\gamma_Y(\cdot)$ til Y_t tilfredsstiller, og bestem $\gamma_Y(h)$ for $h \geq 0$. Vis at tilhørende ACF er gitt ved

$$\rho_Y(h) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{h-1}; \quad h \geq 1 \quad (7)$$

Y_t kan, under visse betingelser, betraktes som gitt av følgende tilstandsrom-representasjon:

$$Y_t = X_t + V_t; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (8)$$

og

$$X_{t+1} = \phi X_t + W_t; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (9)$$

for passende valg av 'hvit støy'-prosesser V_t og W_t , hvor $V_t \sim \text{IID } N(0, \sigma_V^2)$, $W_t \sim \text{IID } N(0, \sigma_W^2)$, $E[V_t W_s] = 0$ for alle s og t . Du kan også anta at $E[X_t V_s] = 0$ for alle s og t .

- b) Bestem ACVF til Y_t gitt av ligningene (8) og (9). Vis at ACF til Y_t er gitt ved uttrykket

$$\rho_Y(h) = \left(1 + \frac{\sigma_V^2}{\sigma_W^2} (1 - \phi^2)\right)^{-1} \phi^h; \quad h \geq 1 \quad (10)$$

- c) ACVF til Y_t gitt av ligningene (8) og (9) er identisk, under visse betingelser, med ACVF til Y_t bestemt av ligning (6). Vis det ved å vise at σ_V og σ_W kan uttrykkes ved σ , ϕ og θ , og bestem hvilke verdier for θ som kan tillates.