



Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:

Arvid Næss 73 59 70 53/ 99 53 83 50

EKSAMEN I EMNE TMA4285 TIDSREKKER OG FILTERTEORI

15. desember 2004

Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag

K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Kalkulator HP30S

Ett gult A5-ark med stempel med egne formler og notater

Sensuren faller: 12. januar 2005

NB: Alle svar skal begrunnes.

Notasjon brukt i dette oppgavesettet:

- Z_t er hvit støy med varians σ^2 , dvs. $Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.
- B er *backshift*-operatoren, slik at $B^j X_t \equiv X_{t-j}$, $j \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- ACVF = autokovarians-funksjon, ACF = autokorrelasjons-funksjon.

Oppgave 1

Anta at tidsrekken X_t er en $\text{ARMA}(p, q)$ -prosess definert ved

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

hvor AR-polynomet $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$, og MA-polynomet $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$.

- a) Hvilke betingelser er oppfylt når X_t er en $\text{ARMA}(p, q)$ -prosess? Diskutér spesielt hvilke krav som må stilles til AR- og MA-polynomene.
- b) Hva betyr det at X_t er en kausal tidsrekke, og hvordan kan det uttrykkes? Hva med invertibel?
- Hvilke krav må stilles til AR- og MA-polynomene for å sikre at X_t skal være både kausal og invertibel?

La ϕ og θ betegne reelle konstanter. Tidsrekken X_t definert i ligning (1), skal nå spesialiseres til følgende modell:

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1} + 0.5 Z_{t-2}; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (2)$$

- c) For hvilke verdier av ϕ og θ er X_t både kausal og invertibel?
- d) Bestem $\text{MA}(\infty)$ -representasjonen av X_t når den er kausal, og verifiser at kravet for konvergens er oppfylt.

Oppgave 2

La ϕ betegne en reell konstant, og anta at $|\phi| < 1$. Betrakt tidsrekken X_t definert som følger:

$$X_1 = Z_1 \quad (3)$$

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t; \quad t = 2, 3, \dots \quad (4)$$

- a) Bestem middelværdi og varians til X_t for $t = 1, 2, \dots$, og vis at

$$\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma^2 \phi^h \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2}$$

for $t \geq 1$ og $h \geq 0$.

Er X_t en stasjonær tidsrekke?

- b) Argumentér for at X_t kan betraktes som stasjonær for store verdier av t . Beskriv deretter hvordan du rent praktisk kan bruke dette til å simulere n observasjoner av en stasjonær Gaussisk AR(1)-modell ut fra simulerte verdier fra en IID $N(0, 1)$ -prosess, dvs. uavhengig, identisk fordelt Gaussisk hvit støy med varians lik 1.0.

- c) Anta at den første ligningen erstattes med

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \phi^2}} Z_1 \quad (5)$$

Er den resulterende tidsrekken stasjonær?

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi anta at $Z_t \sim \text{IID } N(0, \sigma^2)$. La tidsrekken Y_t være en kausal ARMA(1,1)-prosess gitt ved

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1}; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (6)$$

hvor det antas at $\phi > 0$.

- a) Bestem ligningene som ACVF $\gamma_Y(\cdot)$ til Y_t tilfredsstiller, og bestem $\gamma_Y(h)$ for $h \geq 0$. Vis at tilhørende ACF er gitt ved

$$\rho_Y(h) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{h-1}; \quad h \geq 1 \quad (7)$$

Y_t kan, under visse betingelser, betraktes som gitt av følgende tilstandsrom-representasjon:

$$Y_t = X_t + V_t; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (8)$$

og

$$X_{t+1} = \phi X_t + W_t; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (9)$$

for passende valg av 'hvit støy'-prosesser V_t og W_t , hvor $V_t \sim \text{IID } N(0, \sigma_V^2)$, $W_t \sim \text{IID } N(0, \sigma_W^2)$, $E[V_t W_s] = 0$ for alle s og t . Du kan også anta at $E[X_t V_s] = 0$ for alle s og t .

- b) Bestem ACVF til Y_t gitt av ligningene (8) og (9). Vis at ACF til Y_t er gitt ved uttrykket

$$\rho_Y(h) = \left(1 + \frac{\sigma_V^2}{\sigma_W^2}(1 - \phi^2)\right)^{-1} \phi^h; \quad h \geq 1 \quad (10)$$

- c) ACVF til Y_t gitt av ligningene (8) og (9) er identisk, under visse betingelser, med ACVF til Y_t bestemt av ligning (6). Vis det ved å vise at σ_V og σ_W kan uttrykkes ved σ , ϕ og θ , og bestem hvilke verdier for θ som kan tillates.



Bokmål

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMENSOPPGAVENE I
EMNE TMA4285 TIDSREKKER OG FILTERTEORI
15. desember 2004
Tid: 09:00–13:00

Oppgave 1

- a) For at X_t skal være en ARMA-prosess må den være stasjonær, og AR- og MA-polynomet kan ikke ha felles røtter. Stasjonaritet sikres ved at $\phi(z) \neq 0$ for $|z| = 1$ ($z \in \mathbf{C} =$ de komplekse tall).
- b) X_t er en kausal tidsrekke hvis X_t kan uttrykkes på følgende måte som en en-sidig lineær prosess: $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$, hvor $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Dette er en $MA(\infty)$ -modell.

At X_t er invertibel betyr at X_t kan representeres som en $AR(\infty)$ -modell, dvs. $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = Z_t$, hvor $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$.

X_t er kausal hvis og bare hvis røttene i AR-polynomet $\phi(z)$ ligger utenfor enhetsdisken i $\mathbf{C}$, dvs. $\phi(z) \neq 0$ for $|z| \leq 1$.

For at X_t skal være invertibel, er det nødvendig og tilstrekkelig at røttene i MA-polynomet $\theta(z)$ ligger utenfor enhetsdisken.

- c) AR-polynomet har åpenbart roten $z = 1/\phi$. Denne ligger utenfor enhetsdisken hvis og bare hvis $|\phi| < 1$.

MA-polynomet er nå $\theta(z) = 1 + \theta z + 0.5z^2$.

Røttene, betegnet med z_1 og z_2 , er gitt ved

$$z_{1,2} = -\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 2}$$

Vi ser at for $|\theta| \geq \sqrt{2}$, så er røttene reelle, mens for $|\theta| < \sqrt{2}$, så er røttene kompleks konjugerte.

Ser på det siste tilfellet først. For $|\theta| < \sqrt{2}$, blir ($i = \sqrt{-1}$)

$$z_{1,2} = -\theta \pm i\sqrt{2 - \theta^2}$$

Det gir

$$|z_{1,2}|^2 = \theta^2 + 2 - \theta^2 = 2$$

Det gir at $|z_{1,2}| > 1$ for $|\theta| < \sqrt{2}$.

Anta så $\theta \geq \sqrt{2}$:

Da er $z_2 < z_1 = -\theta + \sqrt{\theta^2 - 2} < 0$. Må derfor kreve $-\theta + \sqrt{\theta^2 - 2} < -1$, som gir $\theta < 3/2$.

Tilsvarende, for $\theta \leq -\sqrt{2}$ blir $0 < z_2 = -\theta - \sqrt{\theta^2 - 2} < z_1$. Må derfor kreve $-\theta - \sqrt{\theta^2 - 2} > 1$, som gir $\theta > -3/2$.

Dermed ligger røttene i MA-polynomet utenfor enhetsdisken hvis og bare hvis $|\theta| < 3/2$.

Konklusjon: X_t er både kausal og invertibel hvis og bare hvis $|\phi| < 1$ og $|\theta| < 3/2$.

- d) For MA(∞)-representasjonen $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ kan koeffisientene ψ_j bestemmes av ligningen $\psi(z) = \theta(z)/\phi(z)$, hvor $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j$, $\phi(z) = 1 - \phi z$ og $\theta(z) = 1 + \theta z + 0.5z^2$. Det gir ligningen

$$\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \dots = \frac{1 + \theta z + 0.5z^2}{1 - \phi z} = (1 + \theta z + 0.5z^2)(1 + \phi z + \phi^2 z^2 + \dots)$$

Sammenligning av koeffisientene foran z^j , $j = 0, 1, 2, \dots$, gir

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_1 = \phi + \theta$$

$$\psi_2 = \phi^2 + \phi\theta + 0.5$$

$$\psi_3 = (\phi^2 + \phi\theta + 0.5)\phi$$

$$\vdots$$

$$\psi_j = (\phi^2 + \phi\theta + 0.5)\phi^{j-2}; \quad j = 2, 3, \dots$$

Herav følger at $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ hvis og bare hvis $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j < \infty$, og det holder åpenbart siden $|\phi| < 1$.

Oppgave 2

a) $E[X_t] = 0$ siden $E[Z_t] = 0$.

$$\begin{aligned}
 \sigma_t^2 &= \text{Var}(X_t) = E[X_t^2] = E[(\phi X_{t-1} + Z_t)(\phi X_{t-1} + Z_t)] \\
 &= \phi^2 E[X_{t-1}^2] + \sigma^2 \\
 &= \phi^2 \sigma_{t-1}^2 + \sigma^2 = \phi^2 (\phi^2 \sigma_{t-2}^2 + \sigma^2) + \sigma^2 \\
 &= \phi^4 \sigma_{t-2}^2 + \sigma^2 (1 + \phi^2) \\
 &\vdots \\
 &= \phi^{2(t-1)} \sigma_1^2 + \sigma^2 (1 + \phi^2 + \dots + \phi^{2(t-2)}) \\
 &= \sigma^2 (1 + \phi^2 + \dots + \phi^{2(t-1)}) \\
 &= \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2}
 \end{aligned}$$

siden $\sigma_1 = \sigma$.

Et følgeresultat av stasjonaritet er at variansen er konstant, dvs. uavhengig av tidens t . Det er åpenbart ikke tilfelle her, og X_t er derfor ikke stasjonær.

La $h \geq 0$ og $t \geq 1$. Da er

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) &= E[X_t X_{t+h}] = E[X_t (\phi X_{t+h-1} + Z_{t+h})] = \phi E[X_t X_{t+h-1}] = \dots \\
 &= \phi^h E[X_t^2] = \phi^h \sigma_t^2 \\
 &= \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2} \phi^h
 \end{aligned} \tag{1}$$

b) Vi ser av ligning (1) ovenfor at

$$\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sigma^2 \frac{\phi^h}{1 - \phi^2}$$

Siden grenseverdien for store t eksisterer og er bare avhengig av h , kan vi tilnærmet si at X_t er stasjonær for store t .

Siden Z_t er IID $N(0,1)$, blir X_t en gaussisk tidsrekke. For store t blir derfor X_t tilnærmet en stasjonær gaussisk tidsrekke som tilfredsstiller ligning (4), dvs. X_t blir tilnærmet en gaussisk AR(1)-prosess for store t .

En praktisk simulering av n observasjoner fra en gaussisk AR(1)-prosess (med $|\phi| < 1$) kan da oppnås ved å simulere fra den gitte modellen over et tidsintervall med lengde T slik at $|\phi|^{T-n} < \varepsilon$, hvor ε er en valgt nøyaktighet. (Dvs. tall mindre enn ε blir betraktet som null.)

c) Ligning (5) gir at

$$\sigma_1^2 = \text{Var}(X_1) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

Anta $\sigma_t^2 = \sigma_1^2$. Vi har

$$\begin{aligned}\sigma_{t+1}^2 &= \phi^2 \sigma_t^2 + \sigma^2 = \phi^2 \sigma_1^2 + \sigma^2 \\ &= \phi^2 \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} + \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\end{aligned}$$

Per induksjon følger at $\sigma_t^2 = \sigma_1^2$ for alle t . Siden $\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma_t^2 \phi^h$ ($h \geq 0$), følger at

$$\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma^2 \frac{\phi^h}{1 - \phi^2}$$

Dermed er X_t stasjonær.

Oppgave 3

a) Ligning (6) gir relasjonen

$$\gamma_Y(h) - \phi \gamma_Y(h-1) = 0; \quad h = 2, 3, \dots$$

Det medfører at $\gamma_Y(h) = \gamma(1) \phi^{h-1}$.

Tilsvarende finner vi at

$$\gamma_Y(0) = \phi \gamma_Y(1) + \sigma^2 (1 + \phi\theta + \theta^2)$$

og

$$\gamma_Y(1) = \phi \gamma_Y(0) + \sigma^2 \theta$$

Ved å løse de to siste ligningene, finner vi at

$$\gamma_Y(0) = \sigma^2 \frac{1 + 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2}$$

og

$$\gamma_Y(1) = \sigma^2 \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 - \phi^2}$$

Dermed er $\gamma_Y(h)$ fullstendig bestemt, og vi finner at ACF er gitt ved

$$\rho_Y(h) = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2} \phi^{h-1}$$

b) Fra ligning (9) og resultatene i punkt a) (eller Oppgave 2) finner vi at

$$\gamma_X(h) = \sigma_W^2 \frac{\phi^h}{1 - \phi^2}; \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

Ligning (8) gir at

$$\gamma_Y(0) = \text{Var}(Y_t) = \text{Var}(X_t + V_t) = \frac{\sigma_W^2}{1 - \phi^2} + \sigma_V^2$$

og for $h \geq 1$

$$\gamma_Y(h) = \text{Cov}(Y_{t+h}, Y_t) = \text{Cov}(X_{t+h} + V_{t+h}, X_t + V_t) = \gamma_X(h)$$

Herav følger at for $h \geq 1$ er ACF til Y_t gitt ved

$$\rho_Y(h) = \frac{\sigma_W^2 \frac{\phi^h}{1 - \phi^2}}{\frac{\sigma_W^2}{1 - \phi^2} + \sigma_V^2} = \left(1 + \frac{\sigma_V^2}{\sigma_W^2}(1 - \phi^2)\right)^{-1} \phi^h$$

c) Vi ser at ACF til Y_t blir identisk i de to tilfellene når

$$\left(1 + \frac{\sigma_V^2}{\sigma_W^2}(1 - \phi^2)\right)^{-1} \phi = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}$$

Dermed, hvis likhet kan oppnås i denne ligningen, og variansen er den samme, dvs.

$$\frac{\sigma_W^2}{1 - \phi^2} + \sigma_V^2 = \sigma^2 \frac{1 + 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2}$$

så er åpenbart de to ACVFene identiske.

Løser vi den første ligningen over, får vi at

$$\frac{\sigma_V^2}{\sigma_W^2} = \frac{-\theta}{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}$$

Ved å bruke den andre ligningen, finner vi at

$$\sigma_W^2 = \sigma^2(1 + \phi\theta)(1 + \theta/\phi)$$

og til slutt

$$\sigma_V^2 = -\sigma^2 \frac{\theta}{\phi}$$

$\sigma_V^2 > 0$ krever at $\theta < 0$. Fra uttrykket for σ_W^2 ser vi at $\sigma_W^2 > 0$ for $\theta < -1/\phi$ og $\theta > -\phi$. Dermed blir det tillatte verdiområdet for θ : $-\infty < \theta < -1/\phi$ og $-\phi < \theta < 0$. For slike verdier på θ kan vi alltid finne passende verdier for σ_V og σ_W slik at de to ACVFene blir identiske.



Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:

Arvid Næss

73 59 70 53 / 99 53 83 50

EKSAMEN I EMNE TMA4285 TIDSREKKER OG FILTERTEORI

9. august 2004

Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag

K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Kalkulator HP30S

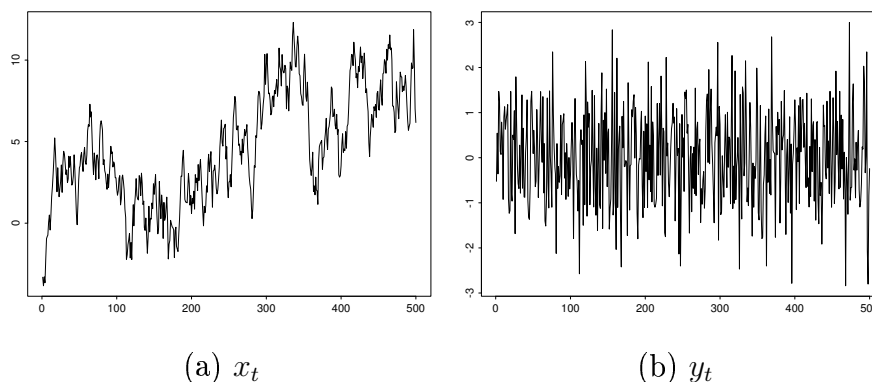
Ett gult A5-ark med stempel med egne formler og notater

Sensuren faller: 23. august 2004

NB: Alle svar skal begrunnes.

Notasjon brukt i dette oppgavesettet:

- w_t er hvit støy med varians σ_w^2 .
- B er *backshift*-operatoren, slik at $B^k x_t \equiv x_{t-k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- x_t^s er prognosen for x_t gitt $x_1, \dots, x_s$.



Figur 1: (a) data fra modellen definert i (1), dvs. x_t , og (b) den deriverte y_t .

Oppgave 1

La x_t være gitt ved

$$(1 - \phi B)x_t = bt + w_t \quad (1)$$

der b er en konstant.

a) Hva menes med at en stokastisk prosess er svakt stasjonær?

For hvilke verdier av b og ϕ er x_t en svakt stasjonær prosess?

Anta videre at $|\phi| < 1$ og $b \neq 0$.

Data fra prosessen i (1) er vist i figur 1a.

b) Hvorfor analyserer vi ofte differensierte data (figur 1b)

$$y_t = (1 - B)x_t$$

når dataene er som i figur 1a?

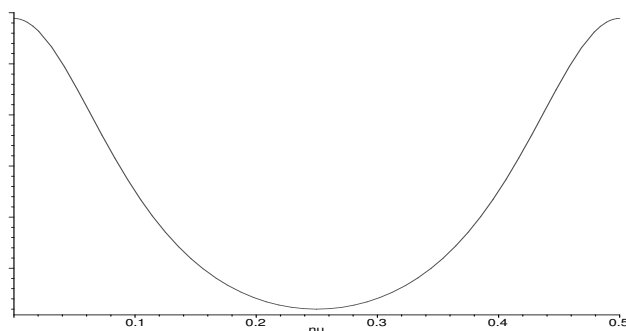
c) Hvilken ARMA-modell følger y_t ?

Er y_t invertibel? Kommentér.

Oppgave 2

La x_t være gitt ved

$$x_t = \phi_x x_{t-1} + w_{x,t}, \quad |\phi_x| < 1, \quad \text{Var}(w_{x,t}) = \sigma_{w,x}^2$$

Figur 2: Ett mulig frekvensspekter til z_t .

og y_t være gitt ved

$$y_t = \phi_y y_{t-1} + w_{y,t}, \quad |\phi_y| < 1, \quad \text{Var}(w_{y,t}) = \sigma_{w,y}^2$$

der indeksene “ x ” og “ y ” indikerer tilhørighet til x - og y -prosessen.

Anta $\{x_t\}$ er ukorrelert med $\{y_t\}$ og at vi observerer *kun* z_t , der

$$z_t = x_t + y_t$$

a) Finn autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) til z_t .

La $f_x(\nu)$ være frekvensspekteret til x_t , og tilsvarende med $f_y(\nu)$ og $f_z(\nu)$.

b) Vis at

$$f_z(\nu) = f_x(\nu) + f_y(\nu). \quad (2)$$

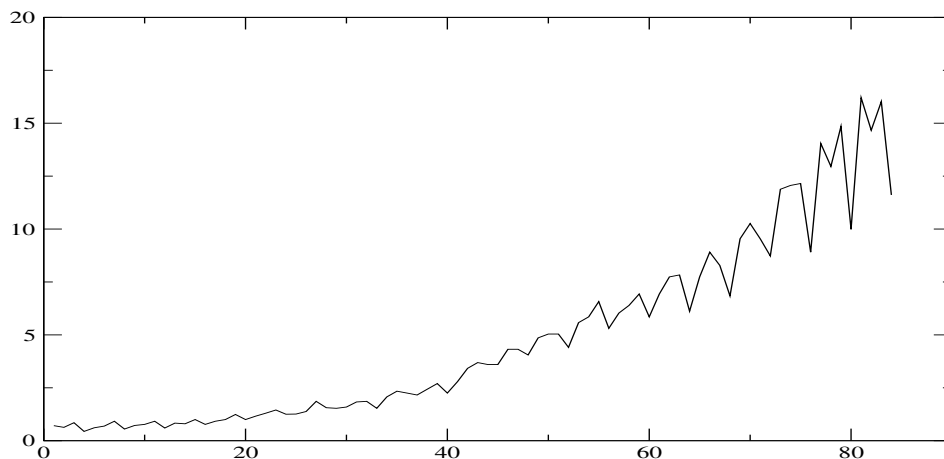
Bruk (2) til å finne $f_z(\nu)$.

c) Dersom $f_z(\nu)$ hadde vært som i figur 2, hva vet vi da om fortegnene til ϕ_x og ϕ_y ?

Anta videre at $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, samt at $\phi_x = \phi_y = \phi$.

d) Vis at z_t er en ARMA-prosess. Bestem orden og alle parametre i modellen.

e) Finn ett- og to-stegs prognose samt tilhørende prognosefeil for z_t .



Figur 3: Kvartalsvise overskudd for Johnson & Johnson.

Oppgave 3

I figur 3 er det vist kvartalsvise data for overskudd for firmaet Johnson & Johnson.

Du blir forelagt følgende modell: De observerte data, y_t , modelleres ved

$$y_t = \mu_t + s_t + v_t$$

der μ_t er trend, s_t er sesongkomponent og v_t er hvit støy. Trenden μ_t modelleres ved

$$\mu_t = \beta \mu_{t-1} + w_t$$

der w_t er hvit støy og β en parameter. Sesongkomponenten s_t modelleres ved

$$s_t + s_{t-1} + s_{t-2} + s_{t-3} = u_t$$

der u_t er hvit støy.

- a) Skriv modellen på “state-space” form, dvs med en tilstands-ligning og en observasjon-ligning.

Forklar kort hvordan du vil tilpasse modellen til de observerte data samt beregne prognoser for det kvartalsvise overskuddet.

- b) Diskuter hvordan sesongvariasjon er tatt hensyn til i denne modellen. Burde det vært gjort på en annen måte? I så fall, hvordan?