Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Håvard Rue 73593533/92600021

EKSAMEN I FAG TMA4285 Tidsrekkemodeller
Mandag 17. desember 2007
Tid: 09:00–13:00

Tilatte hjelpemidler:
Godkjent kalkulator.
Statistiske tabeller og formler, TAPIR.
Rottman: Matematisk formelsamling (alle språkutgaver).

NB: Alle svar skal begrunnes.

Notasjon brukt i denne oppgaven:

- z_t er hvit Gaussisk støy med varians σ^2.

Formelsamlig:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}))$$
$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{Cov}(\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})) + \mathrm{E}(\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}))$$

Oppgave 1

La x_t være gitt ved

$$x_t = \phi_2 x_{t-2} + z_t. \tag{1}$$

a) Hva menes med at en stokastisk prosess er (svakt) stasjonær?

Hva menes med at en stokastisk prosess er invertibel?

For hvilke verdier av ϕ_2 er x_t stasjonær?

For hvilke verdier av ϕ_2 er x_t invertibel?

Anta videre at $|\phi_2| < 1$.

b) Finn prognose samt progosefeil for

$$x_{t+k} \mid x_t, x_{t-1}, \ldots$$

for $k = 1, 2, 3$ og 4.

Oppgave 2

a) La

$$x_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z_{t-j}, \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

og la $\gamma_x(k)$ være autokovariansfunksjonen (ACVF) til x_t. Vis at

$$\gamma_x(k) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j-k}. \tag{2}$$

b) Bruk (2) til å finne autokovariansfunksjonen til prosessen

$$x_t - \phi x_{t-1} = z_t + \theta z_{t-1}, \qquad |\phi| < 1, \quad |\theta| < 1,$$

for $k = 0$ og 1.

Oppgave 3 Anta følgende tilstandsmodell ("state-space model")

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{V}_t \tag{3}$$
$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{G}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{W}_t \tag{4}$$

med standard antagelser. La Cov$(\boldsymbol{V}_t) = \boldsymbol{Q}$ og Cov$(\boldsymbol{W}_t) = \boldsymbol{R}$.

a) Representer hver av de følgende to ARMA-prosesser som en tilstandsmodell:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + z_t \tag{5}$$

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + z_t + \theta_1 z_{t-1} \tag{6}$$

b) Hvilke praktiske fordeler har vi ved å behandle en ARMA(p, q)-modell som en tilstandsmodell?

Definer

$$\boldsymbol{\mu}_{s|t} = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_s | \boldsymbol{Y}_t, \boldsymbol{Y}_{t-1}, \ldots) \quad \text{og} \quad \boldsymbol{\Omega}_{s|t} = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_s | \boldsymbol{Y}_t, \boldsymbol{Y}_{t-1}, \ldots).$$

c) Vis at

$$\boldsymbol{\mu}_{t+k|t} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}_{t+k-1|t}$$

og

$$\boldsymbol{\Omega}_{t+k|t} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Omega}_{t+k-1|t}\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{Q}$$

for $k = 1, 2, \ldots$.
Alternativt: Finn $\boldsymbol{\mu}_{t+k|t}$ og $\boldsymbol{\Omega}_{t+k|t}$ for $k = 1, 2, 3$ og "konkluder" med at rekursjonene gjelder.

Den latente modellen (3) sies å være *stabil* ("stable") dersom alle egenverdiene til matrisen $\boldsymbol{F}$ er mindre enn 1 i absoluttverdi.

d) Vis at dersom (3)-(4) representerer AR(2)-prosessen (5), så er den latente modellen stabil hvis og bare hvis AR(2)-prosessen er stasjonær og kausal.

TMA 4285 Tidsrekkemodeller

17. des. 2007, Løsningsskisse

1a) stasjonær $|\phi| \neq 1$, invertibel $|\phi| \neq 1$, side 84–86

1b)

$$\hat{x}_{t+1} = \phi_2 X_{t-1} \qquad X_t = Z_t(1 + \phi_2 B^2 + \phi_2^2 B^4 + \phi_2^3 B^6 + \dots)$$

$$\hat{x}_{t+2} = \phi_2 X_t \qquad \text{Var}(\hat{X}_{t+1}) = \text{Var}(\hat{X}_{t+2}) = \sigma^2$$

$$\hat{x}_{t+2} = \phi_2^2 X_{t-1}$$

$$\hat{x}_{t+3} = \phi_2^2 X_t \qquad \text{Var}(\hat{X}_{t+3}) = \text{Var}(\hat{X}_{t+4}) = \sigma^2(1 + \phi_2^2)$$

2a) side 52

2b) side 89

$$\gamma(0) = \sigma^2\left(1 + (\theta+\phi)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}\right) = \sigma^2\left(1 + \frac{(\phi+\theta)^2}{1-\phi^2}\right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2\left(\theta+\phi + (\theta+\phi)^2 \phi \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}\right) = \sigma^2\left(\theta+\phi + \frac{(\theta+\phi)^2}{1-\phi^2}\phi\right)$$

3a) s. 261

$$\begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ X_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + [0]$$

s. 262

$$\begin{bmatrix} U_t \\ U_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{t-1} \\ U_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_t = \begin{bmatrix} 1 & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_t \\ U_{t-1} \end{bmatrix} + [0]$$

3b) ok

3c)

$$\underline{\nu_{t+k|t}} = E(X_{t+k} \mid Y_t, Y_{t-1} \dots) = E\,E(X_{t+k} \mid X_{t+k-1}, Y_t \dots)$$

$$= E(F X_{t+k-1} \mid Y_t \dots) = \underline{F \nu_{t+k-1|t}}$$

$$\underline{\Omega_{t+k|t}} = \text{Cov}(X_{t+k} \mid Y_t, Y_{t-1} \dots) = E\,\text{Cov}(X_{t+k} \mid X_{t+k-1}\ Y_t \dots)$$

$$+ \text{Cov}\,E(X_{t+k} \mid X_{t+k-1}\ Y_t, \dots)$$

$$= E(Q \mid Y_t \dots) + \text{Cov}(F X_{t+k-1} \mid Y_t \dots)$$

$$= \underline{Q + F \Omega_{t+k-1|t} F^T}$$

3d) ~~SBH~~ oppgave 8.3

side 319