



Fagleg kontakt under eksamen:

John Tyssedal tlf.: 93534/93520

EKSAMEN I FAG 75565 TIDSREKKER OG FILTERTEORI
Onsdag 4. desember 1996
Tid: 0900-1400

Hjelpemiddel: Statistiske tabeller og formler, matematiske formelsamlinger,
godkjent lommekalkulator.
Legg og merke til formlane på side 5 og 6.

I heile oppgåvesettet skal vi gå ut frå at $\{a_t\}$ er ei følgje av uavhengige $N(0, \sigma_a^2)$ variable.

Oppgåve 1.

a) Kva vil det sei at ein stokastisk tidsrekkeprosess $\{Z_t\}$ er svakt stasjonær ?
Forklar (utan bevis) korleis Yule-Walker likningane kan brukast til å finne den partielle
autokorrelasjonsfunksjonen, $\{\phi_{kk}\}$, til ein svakt stasjonær tidsrekkeprosess.

b) Finn autokorrelasjonsfunksjonen til tidsrekkeprosessen

$$Z_t = a_t - \theta_4 a_{t-4}$$

Vis at for denne prosessen er $\phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{33} = 0$ og $\phi_{44} = \frac{-\theta_4}{1 + \theta_4^2}$.

Oppgåve 2.

a) La $\{X_t\}$ vere ein svakt stasjonær tidsrekkeprosess som er brukt som inngangssignal til eit filter.
Finn transferfunksjonen til filteret definert ved :

$$Y_t = X_t - \theta_4 X_{t-4}$$

Kva eigenskapar har filteret (skisser)? Du kan gå ut frå at θ_4 er positiv.
La ein svakt stasjonær tidsrekkeprosess vere definert ved

$$(1 - \phi_1 B)Z_t = (1 - \theta_4 B^4)a_t$$

Finn og skisser (røff skisse) spektraltettleiken til $\{Z_t\}$ når ϕ_1 og θ_4 begge er positive.

b) Vis at ψ -vektene i den uendelige MA representasjonen for $\{Z_t\}$ er gitt ved:

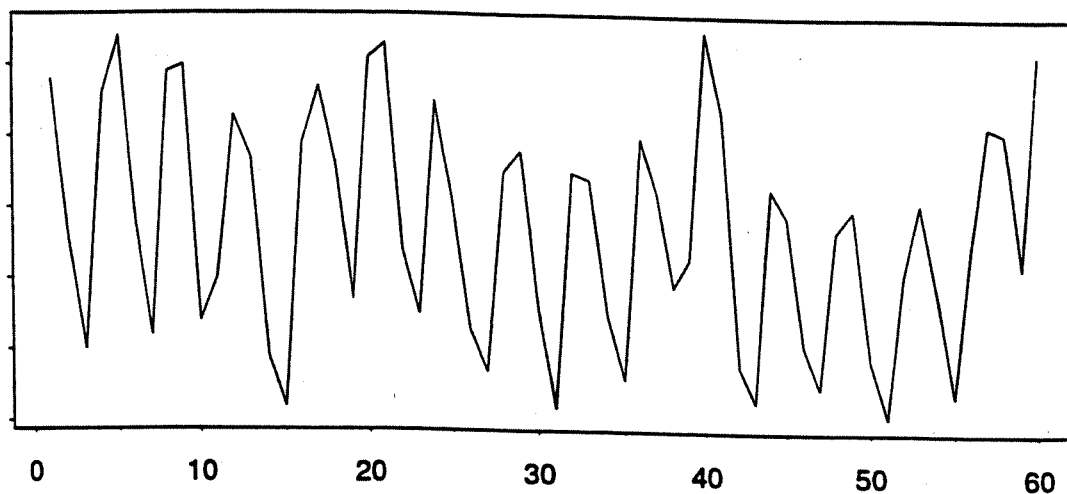
$$\psi_k = \begin{cases} \phi_1^k, & 0 \leq k \leq 3 \\ \phi_1^k - \theta_4 \phi_1^{k-4}, & k \geq 4 \end{cases}$$

c) Finn variansen til $\{Z_t\}$ og forklar kvifor $\rho_k \leq \phi_1^k$ dersom både ϕ_1 og θ_4 er positive.

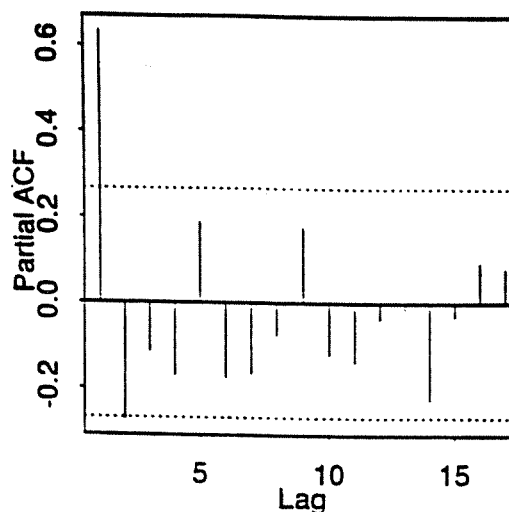
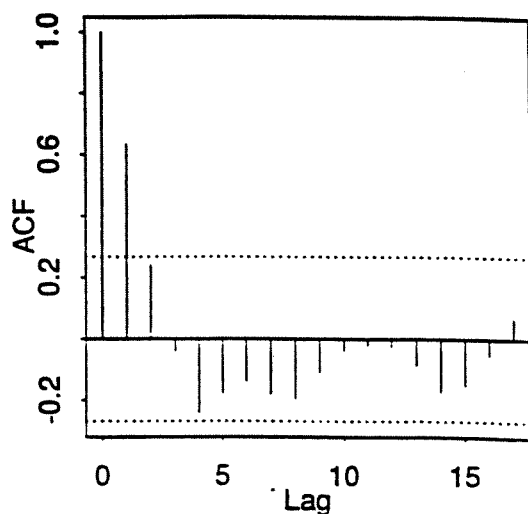
Oppgave 3.

I denne oppgåva kan ein få bruk for resultat frå oppgåve 2.

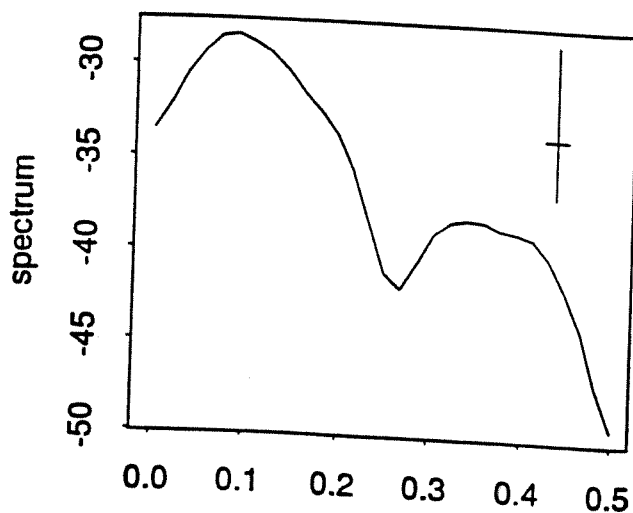
Nedanfor er det synt eit tidsrekkeplott av kvartalsvis gjennomsnittleg fosforinnhald, $\{X_t\}$, i ein innsjø over eit tidsrom på 15 år. Ein har som mål å lage ein påliteleg modell for korleis fosforinnhaldet i innsjøen varierer frå kvartal til kvartal.



a) Tidsrekkeja blei først sesongdifferensiert med periode 4. La den nye tidsrekkeprosessen vere $\{Z_t\}$. Plott av estimert autokorrelasjon og estimert partiell autokorrelasjon er synt nedanfor. Føreslå utifrå desse ein modell for $\{Z_t\}$.



Plott av estimert spektraltetthet for $\{Z_t\}$ er gitt nedanfor. Kva modell for $\{Z_t\}$ støttar denne opp om?



b) Dei to modellane nedanfor blei deretter freista tilpassa $\{Z_t\}$:

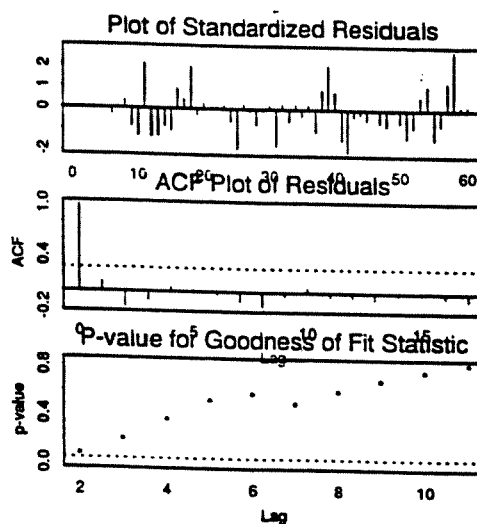
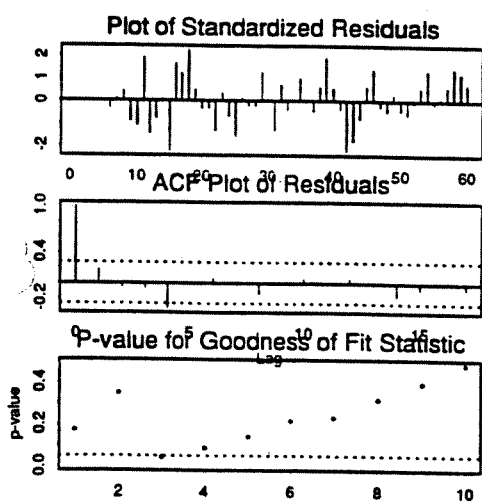
Modell 1: $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)Z_t = a_t$

Modell 2: $(1 - \phi_1 B)Z_t = (1 - \theta_4 B^4)a_t$

noko som gav følgjande resultat i verifiseringsfasen (utskrift frå S-PLUS).

Modell 1:

Modell 2:



Kommenter desse. Kven av desse to modellane vil du føreslå for $\{Z_t\}$?

c) For resten av denne oppgåva skal vi gå ut frå at modell 2 er den rette. Med denne modellen fekk vi følgjande estimat for parameterane i modellen: $\hat{\phi}_1=0.75$, $\hat{\theta}_4=0.85$, $\hat{\sigma}_a^2 = 0.0002$. Finn prognosen for fosforinnhaldet i innsjøen for neste kvartal, $\hat{X}_{60}(1)$ når dei 4 siste observasjonane og dei 4 siste residuala er som synt nedanfor for.

t	56	57	58	59	60
X_t	0.09	0.11	0.11	0.08	0.13
$\hat{a}_t$	-0.008	0.02	0.04	0.003	0.002

Det har vore vanleg å predikere fosforinnhaldet for eit kvartal med tilsvarende tal året før. Kva blir prognosen for neste kvartal med denne framgangsmåten? Samanlikn eit stegs prognosefeil varians med desse to måtane å lage prognoser på.

d) Vis at forma på prognosefunksjonen, $f(l)$, til $\{X_t\}$ er gitt ved:

$$f(l) = c_1 + c_2(-1)^l + c_3(i)^l + c_4(-i)^l + c_5(\phi_1)^l$$

og finn ut for kva l denne gjeld. Vis at $f(l+4) - f(l) \rightarrow 0$ når $l \rightarrow \infty$.

e) Ein måte å fjerne sesongmønster i ei tidsrekke på er å filtrere tidsrekke med eit glidande gjennomsnitt av talet på observasjonar i ein sesongperiode. La

$$Y_t = \frac{X_t + X_{t+1} + X_{t+2} + X_{t+3}}{4}$$

Finn grenseverdien for $E[Y_{n+l}|X_t, t \leq n]$ når $l \rightarrow \infty$. Korleis vil du tolke konstanten c_1 definert under punkt d?

FØLGJANDE FORMLAR KAN KOME TIL NYTTE.

Ved eksponentiell glatting er eitstegsprognosen, $\hat{Z}_{t+1}$, gitt ved:

$$\hat{Z}_{t+1} = \alpha Z_t + (1 - \alpha) \hat{Z}_t, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Informasjonsmatrisa **H** er gitt ved:

$$H_{ij} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right\}$$

$$\text{Var}[\hat{\rho}_k] = \left[\frac{1 + 2 \sum_{j=1}^q \rho_j^2}{n} \right], \quad k > q$$

forutsatt at $\rho_k = 0$ for $k > q$, n er talet på observasjonar.

$\text{Var}[\hat{\phi}_{kk}] = \frac{1}{n}$ for k større enn orden til den autoregressive prosessen.

Box-Pierce observatoren er basert på:

$$Q = n \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2$$

$AIC = -2 \ln f(\hat{\Phi}, \hat{\Theta}, \hat{\sigma}_a^2) + 2M$, M er talet på koeffisientar.

Sum for ei endeleg geometrisk rekkje: $\sum_{i=0}^{n-1} ak^i = \frac{a - ak^n}{1 - k}$

$$\sum_{i=0}^{T-1} e^{\pm 2\pi i \frac{k}{T} i} = \begin{cases} T, & k = lT, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & \text{elles} \end{cases}$$

Dersom $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$ er sammenhengen mellom γ_k og $f(\omega)$ for svakt stasjonære prosesser gitt ved:

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega k} d\omega$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k} \quad |\omega| \leq \pi$$

For eit lineært filter der sammenhengen mellom utsignal $\{y_t\}$ og innsignal $\{x_t\}$ er gitt ved:

$$y_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x_{t-k}$$

er frekvensresponsfunksjonen (transferfunksjonen) gitt ved:

$$\alpha(e^{-i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-i\omega k}$$

og impulsresponsfunksjonen ved:

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(e^{-i\omega}) e^{i\omega k} d\omega$$

Krysskovariansfunksjonen:

$$\gamma_{xy}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{xy}(\omega) e^{i\omega k} d\omega$$

Krysspekteret:

$$f_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(k) e^{-i\omega k} \quad |\omega| \leq \pi$$

Oppgave 1

a) $E[Z_t] = \mu$ uavh. av t

$$\text{Cov}[Z_{t_1}, Z_{t_2}] = \gamma(t_2 - t_1)$$

Yule-Walker

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} - \dots - \phi_p \gamma_{k-p} = 0, \quad k \geq 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}$$

s.a. $\phi_{11} = \rho_1$ $\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}$ gjev ϕ_{22}

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} \quad \text{gjev } \phi_{33} \text{ o.s.b.}$$

b) $E[Z_t] = 0$

$$E[Z_t Z_{t+k}] = E[(a_t - \theta_4 a_{t-4})(a_{t+k} - \theta_4 a_{t+k-4})] = \begin{cases} \sigma_a^2(1 + \theta_4^2), & k=0 \\ -\theta_4 \sigma_a^2, & |k|=4 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\frac{\theta_4}{1+\theta_4^2}, & |k|=4 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$\phi_{11} = \rho_1 = 0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_{22} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_{33} = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \phi_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\theta_4}{1+\theta_4^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_{44} = -\frac{\theta_4}{1+\theta_4^2}$$

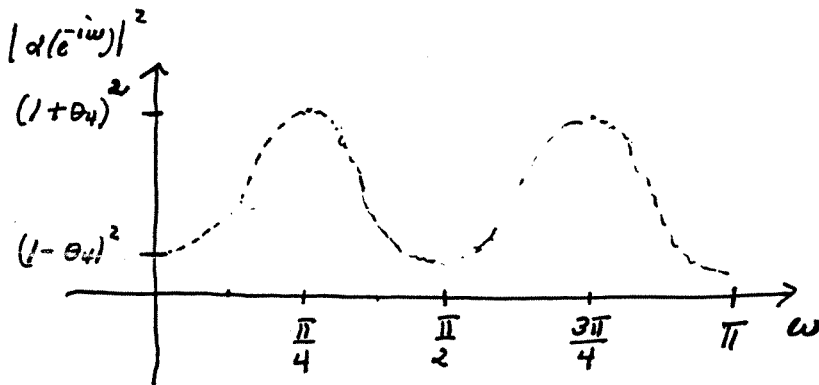
2 a)

$$\alpha(e^{-i\omega}) = 1 - \theta_4 e^{-i4\omega}$$

$$|\alpha(e^{-i\omega})|^2 = (1 - \theta_4 e^{-i4\omega})(1 - \theta_4 e^{i4\omega})$$

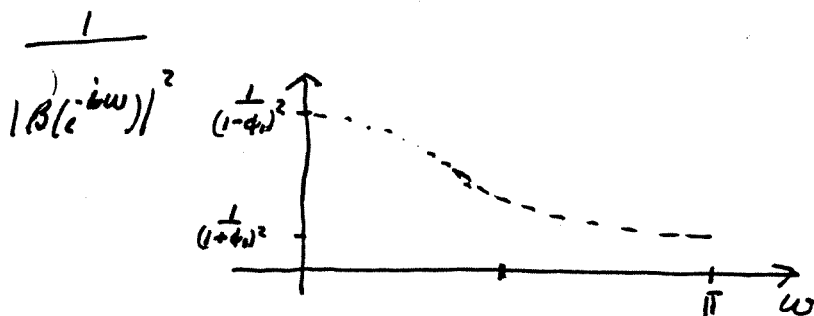
$$= 1 + \theta_4^2 - \theta_4(e^{i4\omega} + e^{-i4\omega}) = 1 + \theta_4^2 - 2\theta_4 \cos 4\omega$$

ω	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$ \alpha(e^{-i\omega}) ^2$	$(1-\theta_4)^2$	$1+\theta_4^2$	$(1+\theta_4)^2$	$1+\theta_4^2$	$(1-\theta_4)^2$	$1+\theta_4^2$	$(1+\theta_4)^2$	$1+\theta_4^2$	$(1-\theta_4)^2$

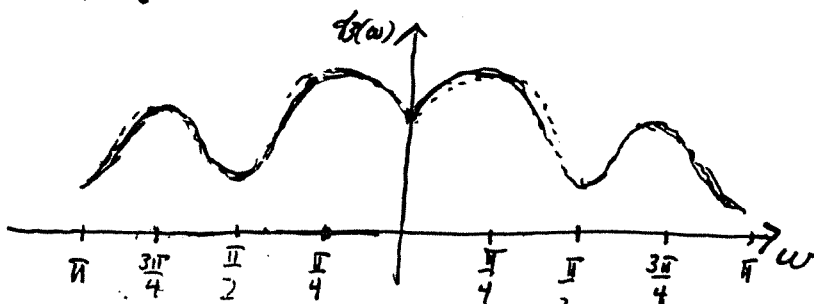


b) $\beta(e^{-i\omega}) = 1 - \phi_1 e^{-i\omega} \Rightarrow |\beta(e^{-i\omega})|^2 = 1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \cos \omega$

og $f_3(\omega) = \frac{|\alpha(e^{-i\omega})|^2}{|\beta(e^{-i\omega})|^2} \cdot f_a(\omega) = \frac{1 + \theta_4^2 - 2\theta_4 \cos 4\omega}{1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \cos \omega} \cdot \frac{\sigma a^2}{2\pi}, \quad \omega \in [0, 2\pi]$



Vi forventer at f_a to toppar i spektret til $f_3(\omega)$. Den siste toppen vil være dempet i forhold til den første. Graden av damping er bestemt av ϕ_1 .



Et slags prognosefeil med ARIMA modellen = σ_a^2

$$\hat{\sigma}_a^2 = 0.0002$$

Med den andre metoden har vi

$$X_{61} = X_{57} + Z_{61} \Rightarrow \text{Et slags prognosefeil/variens}$$

$$\text{er } \text{Var}[Z_6], \quad \hat{\sigma}_0 = \frac{\hat{\sigma}_a^2 (1 + 0.85^2 - 1.7 \cdot 0.75^4)}{1 - 0.75^2} = 0.0002 \cdot 2.71 = 0.00054$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_a^2} = 2.71$$

$$d) \quad X^4 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 = -1 \\ X_3 = i \\ X_4 = -i \end{cases}$$

$$X - \phi_1 = 0 \Rightarrow X = \phi_1$$

$$\Rightarrow f(l) = C_1 + C_2(-1)^l + C_3(i)^l + C_4(-i)^l + C_5 \phi_1^l$$

$$\text{for } l \geq q + 1 - p - d = 4 + 1 - 1 - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} f(l+4) - f(l) &= C_1 + C_2(-1)^l(-1)^4 + C_3(i)^l(i)^4 + C_4(-i)^l(-i)^4 + C_5 \phi_1^{l+4} \\ &\quad - C_1 - C_2(-1)^l - C_3(i)^l - C_4(-i)^l - C_5 \phi_1^l \\ &= C_5 \phi_1^l (\phi_1^4 - 1) \rightarrow 0 \text{ m\u00e5r } l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad E[X_{m+1} | X_t, t \leq m] &= \frac{1}{4} \{ f(l) + f(l+1) + f(l+2) + f(l+3) \} \\ &= \frac{1}{4} \{ 4C_1 + C_2((-1)^l + (-1)^l(-1) + (-1)^l(-1)^2 + (-1)^l(-1)^3) \\ &\quad + C_3(i)^l + (i)^l \cdot i + (i)^l(-1) + (i)^l(-i) \\ &\quad + C_4((-i)^l + (-i)^l(-i) + (-i)^l(-1) + (-i)^l(i)) \\ &\quad + C_5(\phi_1^l + \phi_1^{l+1} + \phi_1^{l+2} + \phi_1^{l+3}) \} \\ &= C_1 + \frac{C_5}{4} \phi_1^l (1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \phi_1^3) \rightarrow C_1 \text{ m\u00e5r } l \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_1$ er forventet gjennomsnittlig \u00e5rsniv\u00e5 av forster (p\u00e5 slutten ... L\u00eddsselskapet)

b)

$$Z_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} (a_t - \theta_4 a_{t-4})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_1^k a_{t-k} - \theta_4 \sum_{s=0}^{\infty} \phi_1^s a_{t-4-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_1^k a_{t-k} - \theta_4 \sum_{k=4}^{\infty} \phi_1^{k-4} a_{t-k}$$

$$\Rightarrow \psi_k = \begin{cases} \phi_1^k, & 0 \leq k \leq 3 \\ \phi_1^k - \theta_4 \phi_1^{k-4}, & k \geq 4 \end{cases}$$

c)

$$(1) \gamma_0 - \phi_1 \gamma_1 = E[(a_t - \theta_4 a_{t-4})(z_t)] = \sigma_a^2 (1 - \theta_4 \psi_4)$$

$$(2) \gamma_1 - \phi_1 \gamma_0 = E[(a_t - \theta_4 a_{t-4})(z_{t-1})] = -\theta_4 \psi_3 \sigma_a^2$$

$$(3) \gamma_2 - \phi_1 \gamma_1 = -\theta_4 \psi_2 \sigma_a^2$$

$$(4) \gamma_3 - \phi_1 \gamma_2 = -\theta_4 \psi_1 \sigma_a^2$$

$$(5) \gamma_4 - \phi_1 \gamma_3 = -\theta_4 \sigma_a^2$$

$$(6) \gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} = 0, \quad k \geq 5$$

$$(1) \text{ og } (2) \Rightarrow \gamma_0 - \phi_1 (\phi_1 \gamma_0 - \theta_4 \psi_3 \sigma_a^2) = \sigma_a^2 (1 - \theta_4 \psi_4)$$

$$\Rightarrow \gamma_0 (1 - \phi_1^2) = \sigma_a^2 (1 - \theta_4 \psi_4 - \theta_4 \phi_1 \psi_3) = \sigma_a^2 (1 - \theta_4 \phi_1^4 + \theta_4^2 - \theta_4 \phi_1^4)$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2 (1 + \theta_4^2 - 2\theta_4 \phi_1^4)}{1 - \phi_1^2}$$

ϕ_1 og θ_4 positive gjev:

$$(2), (3), (4) \text{ og } (5) \Rightarrow \rho_k < \phi_1 \rho_{k-1}, \quad k \leq 4$$

$$(2) \Rightarrow \rho_1 < \phi_1 \Rightarrow \rho_k < \phi_1^k, \quad k \leq 4$$

$$(6) \Rightarrow \rho_k = \phi_1^{k-4} \rho_4, \quad k \geq 4, \quad \rho_4 < \phi_1^4 \Rightarrow \rho_k \leq \phi_1^k, \quad \forall k.$$

3 a) ϕ_{11} og ϕ_{12} ser ut til å være signifikante, indikerer $AR(2)$. Estimert autokorrelasjonsfunksjon motstrider ikke dette.

Spektrum har toppar ved $f \approx \frac{1}{8}$ og $f \approx \frac{3}{8}$, der siste demper. Dette indikerer at $(1 - \phi_1 B) Z_t = (1 - \theta_4 B^4) a_t$ er en mulig modell for visse valg av ϕ_1 og θ_4

b). For modell 1 indikerer estimert autokorrelasjon for residuala signifikant korrelasjon ved lag 4, medan det er ingen grunn til å anta korrelasjon i residuala for modell 2.

P verdien for GOF testen for modell 2 ligg jamt over den for modell 1 og er dessutan større enn 0.05 ved alle lag. ^{i motsetning til for modell 1} Dette tyder på at modell 2 er den beste.

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B^4) X_t = (1 - \theta_4 B^4) a_t$$

$$\Rightarrow X_t - \phi_1 X_{t-1} - X_{t-4} + \phi_1 X_{t-5} = a_t - \theta_4 a_{t-4}$$

$$\text{b.a } X_{t+1} = \phi_1 X_t + X_{t-3} - \phi_1 X_{t-4} + a_{t+1} - \theta_4 a_{t-3}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{60}(1) &= \phi_1 X_{60} + X_{57} - \phi_1 X_{56} - \theta_4 a_{57} \\ &= 0.75(X_{60} - X_{56}) + X_{57} - 0.85 \cdot a_{57} \end{aligned}$$

$$= 0.75 \cdot 0.04 + 0.11 - 0.85 \cdot 0.02 = \underline{0.123}$$

$$\hat{X}_{60}(1) = X_{57} = 0.11$$

