Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Håvard Rue 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG 75565 Tidsrekker og filterteori

Onsdag 3. desember 1997
Tid: 09:00–14:00

Tilatte hjelpemidler:
Godkjent kalkulator.
Statistiske tabeller og formler, TAPIR.
Et gult ark.

Notasjon brukt i denne oppgaven:

- $\{a_t\}$ er en sekvens av uavhengige og normalfordelte (Gaussfordelte) stokastisk variable med forventningsverdi null og varians σ^2.
- B er *backshift*-operatoren, slik at $B^k Z_t \equiv Z_{t-k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- $\widehat{Z}_t(l)$ er prognosen for Z_{t+l} gitt $\{Z_s = z_s, s \leq t\}$.

Oppgave 1

La $\{Z_t\}$ være gitt ved

$$(1 - \phi B)Z_t = a_t$$

a) Hva menes med at en *generell* stokastisk prosess er svakt stasjonær?
For hvilke verdier av ϕ er $\{Z_t\}$ en svakt stasjonær prosess?

Anta nå at $\{Z_t\}$ er en svakt stasjonær prosess.

b) Finn autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) til $\{Z_t\}$.
Finn krysskorrelasjonsfunksjonen (CCF) mellom $\{a_t\}$ og $\{Z_t\}$. [1]

c) Finn frekvensspekterert $f_z(\omega)$ til $\{Z_t\}$.
Hva kan frekvensspekterert $f_z(\omega)$ fortelle om oppførsel til realisasjoner av $\{Z_t\}$?

La $\{X_t\}$ være en lineær filtrert versjon av $\{Z_t\}$ gitt ved

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j Z_{t-j}, \qquad \text{der} \quad h_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ \xi, & j = 1 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{1}$$

d) Finn frekvensspekterert $f_x(\omega)$ til $\{X_t\}$.

e) Diskuter hvilken rolle filteret har når $\xi = -\phi$?

Anta nå at $\xi \neq -\phi$ og la

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j X_{t-j},$$

der filterkoeffisientene er gitt ved (1).

f) Verifiser at $\{Y_t\}$ er en ARMA(p, q) prosess.
Bestem orden (p, q) og parametre for prosessen $\{Y_t\}$.

---

[1] Ikke pensum i år!

Oppgave 2

La $\{Z_t\}$ være gitt ved

$$(1-\phi B)Z_t = a_t, \qquad |\phi| < 1.$$

Av og til vil det være huller i tidsrekken vårt fordi noen av observasjonene mangler eller er åpenbart ødelagte av forskjellige grunner. Da kan det være ønskelig å "fylle" igjen disse hullene med "predikterte" verdier, der vi betinger med hensyn på både fortid og fremtid.

Anta for enkelthetsskyld at en uendelig lang realisasjon av prosessen er observert, der z_s mangler i datasettet. Vi vil fylle igjen hullet i tidsrekken med estimatoren

$$\widehat{Z}_s = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (Z_{s-k} + Z_{s+k})$$

der $\beta_1, \beta_2, \ldots$, finnes ved å minimere

$$\mathrm{E}\left((\widehat{Z}_s - Z_s)^2\right). \tag{2}$$

a) Hvorfor er det rimelig at estimatoren $\widehat{Z}_s$ er symmetrisk i fortid og fremtid?
Definer partiell autokorrelasjonsfunksjon (PACF).
Hva blir PACF for $\{Z_t\}$? Bruk PACF til å begrunne hvorfor $\beta_k = 0$ for $k = 2, 3, \ldots$.

b) Finn β_1 og forventet kvadratisk feil gitt i ligning (2).

Sluttnote: Det kan forøvrig vises at $Z_s|\{Z_t = z_t, t \neq s\}$ er normalfordelt med forventingsverdi $\beta_1(z_{s-1} + z_{s+1})$ og varians lik forventet kvadratisk feil gitt i ligning (2). Dermed er estimatoren $\widehat{Z}_s$ optimal med hensyn på kvadratisk feil.

Oppgave 3

La $\{Z_t\}$ være en IMA$(1,1)$ prosess,

$$(1-B)Z_t = (1-\theta B)a_t, \qquad |\theta| < 1,$$

der autokovariansfunksjonen til $(1-B)Z_t$ er gitt ved

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2, & k=0 \\ -\theta\sigma^2, & |k|=1 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Eksponensiell glatting er en enkel metode for å lage ett-stegs prognose (dog ikke alltid optimale), og er definert ved

$$\widehat{Z}_t(1) = \widehat{Z}_{t-1}(1) + \alpha(Z_t - \widehat{Z}_{t-1}(1))$$

der α er en passende konstant.

a) Vis at eksponensiell glatting der $\alpha = 1-\theta$ gir optimal ett-stegs prognose for en IMA$(1,1)$ prosess.

IMA$(1,1)$ prosessen ikke den eneste prosessen der eksponensiell glatting kan gi optimal ett-stegs prognose. La $\{Y_t\}$ være definert ved

$$Y_t = \mu_t + \epsilon_t$$

der forventningsverdien til Y_t, μ_t, **også** er en stokastisk prosess definert ved

$$(1-B)\mu_t = \eta_t$$

Her er $\{\eta_t\}$ og $\{\epsilon_t\}$ sekvenser av uavhengige og normalfordelte (Gaussfordelte) støyledd med forventningsverdi null og varians henholdsvis σ_η^2 og σ_ϵ^2. Merk at μ_t'ene ikke er observert.

b) Finn autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) til $(1-B)Y_t$.

Vis at ACF og variansen til $(1-B)Y_t$ er den samme som for ACF og variansen til $(1-B)Z_t$, når

$$\theta = 1 + \frac{1}{2}(c - \sqrt{c^2+4c}), \qquad \text{der} \quad c = \sigma_\eta^2/\sigma_\epsilon^2,$$

og

$$\sigma^2 = \sigma_\epsilon^2 \frac{2+c}{1+\left(1+\frac{1}{2}(c-\sqrt{c^2+4c})\right)^2}.$$

Fra resultatene i **a**) og **b**) kan vi nå slutte at optimal ett-stegs prognose for $\{Y_t\}$ er gitt ved eksponensiell glatting, siden $\{Y_t\}$ kan tolkes som en IMA(1, 1) prosess med de parametre funnet i **b**). Denne analogien kan **også** benyttes til å finne varians for ett-stegs prognosefeil (for $\{Y_t\}$).

c) Hva blir uttrykket for ett-stegs prognose og varians for ett-stegs prognosefeil, for $\{Y_t\}$?
Hva blir uttrykket for ett-stegs prognose og varians for ett-stegs prognosefeil, for $\{\mu_t\}$?

75565 Tidsrekker & filterteori

3. des -97

Skisse til løsning

H. RUE

#1

a) ① S. stasjonær $\quad E\, Z_t = \text{konstant}$

$$\text{Cov}(Z_t, Z_s) = \gamma(t-s)$$

② Dvs $|\phi| < 1$ er $\{Z_t\}$ s. stasjonær

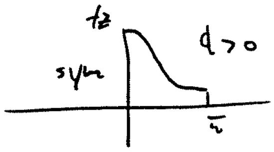
b) $$\rho_k = \phi^{|k|}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots \quad ; \quad \underline{\rho_{aZ}(k)} = \frac{1}{\sigma^2/\sqrt{1-\phi^2}} \begin{cases} \phi^k \sigma_a^2 & , k \geq 0 \\ 0 & , \text{ellers} \end{cases} = \underline{\begin{cases} \phi^k \sqrt{1-\phi^2} \\ 0, \text{ellers} \end{cases}}$$

c) $$\phi(B) = 1 - \phi B \quad , \quad \phi(e^{i\omega}) = 1 - \phi e^{-i\omega}$$

så $$|\phi(e^{i\omega})|^2 = 1 + \phi^2 - 2\phi \cos\omega$$

$$\Rightarrow \quad f_Z(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|\phi(e^{i\omega})|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \phi^2 - 2\phi\cos\omega}$$

for $|\omega| \leq \pi$



dominant av lave frekvenser

dominant av høye frekvenser

d)

$$f_x(\omega) = |h(e^{i\omega})|^2 f_z(\omega)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1+\zeta^2 + 2\zeta\cos\omega}{1+\phi^2 - 2\phi\cos\omega}, \quad |\omega| \le \pi$$

e) når $\zeta = -\phi$ blir $f_x(\omega) = \sigma^2/2\pi$ som er hvit støy. Filteret h er nå invers filteret til $(1-\phi B)^{-1}$ og fungerer som et "whitening" filter.

f)

$$f_f(\omega) = |h(e^{i\omega})|^2 f_x(\omega)$$

$$= \underline{|h(e^{i\omega})|^4 f_z(\omega)} = \frac{|h(e^{i\omega})|^4}{|\phi(e^{i\omega})|^2} \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}}\cdot \text{hvitstøy}}_{\text{ARMA}(p,q)\text{ process}}$$

nå er $h(B) = 1 + \zeta B$

slik at $h(B)^2 = 1 + 2\zeta B + \zeta^2 B^2$

dvs

$$f_f(\omega) = \frac{|h(e^{i\omega})^2|^2}{|\phi(e^{i\omega})|^2} \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

$$= \frac{|\theta_q(e^{i\omega})|^2}{|\phi(e^{i\omega})|} \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

og dermed må $\theta(B) = h(B)^2$, og vi får

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots$$

$$= 1 + 2\zeta + \zeta^2 B^2$$

vi finner da at

$$\theta_1 = -2\zeta$$

$$\theta_2 = -\zeta^2$$

og $\{Y_t\}$ er en ARMA(1,2) prosess.

#2

a) Det er rimelig at $\hat{Z}_s$ er symmetrisk i fortid og fremtid da korrelasjonsstrukturen fremover og bakover i tid, er den samme.

$$\phi_{kk} = \text{Corr}(Z_t, Z_{t+k} \mid Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_{t+k-1})$$
$$= PACF(k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

ϕ_{kk} også lik siste koeffisient i en AR(k) prosess tilpasset $\{Z_t\}$. For AR(1): $\phi_{kk} = \begin{cases} \phi, & k=1 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$

Da Z_{s+2} er uinformativ for Z_s gitt Z_{s+1} vil $\beta_2 = 0$. Tilsvarende for $Z_{s+3}, \ldots$ og for fortid.

b)
$$E\left[(\hat{Z}_s - Z_s)^2\right] = E\left[\left[\beta_1(Z_{s-1} + Z_{s+1}) - Z_s\right]^2\right]$$
$$= E\left[\beta_1^2 (Z_{s-1} + Z_{s+1})^2 - 2\beta_1 (Z_s Z_{s-1} + Z_{s+1} Z_s) + Z_s^2\right]$$
$$= \text{Var}(Z_s) \cdot \left\{\beta_1^2 (1 + 2\phi^2 + 1) - 2\beta_1(\phi + \phi) + 1\right\}$$
$$= \text{Var}(Z_s) \left\{\beta_1^2 (2 + 2\phi^2) - 4\beta_1\phi + 1\right\}.$$

minimer mhp β_1 og får $\frac{d}{d\beta_1}() = 0 \Rightarrow \beta_1 = \frac{\phi}{1+\phi^2}$

og
$$E\left[(\hat{Z}_s - Z_s)^2\right] = \text{Var}(Z_s)\left\{\frac{1-\phi^2}{1+\phi^2}\right\} = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \frac{1-\phi^2}{1+\phi^2}$$
$$= \frac{\sigma^2}{1+\phi^2}$$

Litt mer teknisk å vise at $\frac{\phi}{1+\phi^2}(Z_{s-1} + Z_{s+1})$ og $\frac{\sigma^2}{1+\phi^2}$ er betinget E() og Var() for $Z_s \mid$ naboene [illegible]

#3) a)

$$\left.\begin{array}{l} Var((1-B)Z_t) = \sigma^2(1+\theta^2) \\ Cov((1-B)Z_t, (1-B)Z_{t-1}) = -\theta\sigma^2 \\ Cov(\ldots\ldots) = 0, \ |k|>1 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho_k = \begin{cases} 1, & |k| = 0 \\ \frac{-\theta}{1+\theta^2}, & |k| = 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

ab)

(bok side 74-75)

$$(1-B)Z_t = (1-\theta B)a_t$$

skriv om til

$$a_t = \frac{1-B}{1-\theta B} Z_t = Z_t\left(1 - \alpha B - \alpha(1-\theta)B^2 - \alpha(1-\theta)^2 B^3 \ldots\right)$$

hvor $\alpha = 1-\theta$

dvs

$$Z_t = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} Z_{t-j} + a_t$$

dvs

$$\hat{Z}_{t-1}(1) = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} Z_{t-j}$$

og videre at

$$\hat{Z}_t(1) = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} Z_{t-j+1}$$

$$= \alpha Z_t + (1-\alpha)\alpha \sum_{j=2}^{\infty} (1-\alpha)^{j-2} Z_{t+1-j}$$

$$= \alpha Z_t + (1-\alpha)\hat{Z}_{t-1}(1)$$

$$= \hat{Z}_{t-1}(1) + \alpha(Z_t - \hat{Z}_{t-1}(1))$$

der $\alpha = 1-\theta$

dvs exponentiell glattinga er optimal (for Gaussisk) for IMA(1,1).

b d)

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$$

dvs $(1-B)Y_t = \eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

$$\text{Var}\,(1-B)Y_t = \sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2 = \underline{\sigma_\varepsilon^2\,(2+c)} \quad , \quad c = \sigma_\eta^2/\sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{Cov}\left((1-B)Y_t, (1-B)Y_{t-1}\right) = -\sigma_\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \begin{cases} 1 \,, & k=0 \\ -\frac{1}{2+c} \,, & |k|=1 \\ 0 \,, & \text{ellers} \end{cases}$$

for at Var og ACF skal være like må

$$-\frac{1}{2+c} = -\frac{\theta}{1+\theta^2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 1 + \frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}(c^2+4c)^{1/2}$$

der '+' løsningen gir ikke-invertibel løsning, dvs

$$\underline{\underline{\theta = 1 + \frac{1}{2}\left(c - \sqrt{c^2+4c}\right)}}$$

og videre må

$$\text{Var}\,(1-B)Z_t = \underline{\sigma^2(1+\theta^2)} = \text{Var}\,(1-B)Y_t = \underline{\sigma_\varepsilon^2\,(2+c)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma^2}} = \sigma_\varepsilon^2\,\frac{2+c}{1+\theta^2}$$

$$= \underline{\underline{\sigma_\varepsilon^2\,\frac{2+c}{1+\left(1+\frac{1}{2}\left(c-\sqrt{c^2+4c}\right)\right)^2}}}$$

c d) Prognose for $\{Y_t\}$

$$\hat{Y}_t(1) = \hat{Y}_{t-1}(1) + (1-\theta)\left(Y_t - \hat{Y}_{t-1}(1)\right)$$

der θ er funnet før,

$$\theta = 1 + \frac{1}{2}\left(c - \sqrt{c^2 + 4c}\right) \qquad (*)$$

og ett-skrits prognosefeil er σ^2, varians til a_t i den ekvivalente IMA(1,1) prosessen,

$$Var\left(\hat{Y}_t(1) - Y_{t+1}\right) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{2+c}{1+\theta^2} = \sigma_\varepsilon^2 \frac{2+c}{1+\left(1+\frac{1}{2}\left(c - \sqrt{c^2+4c}\right)\right)^2}$$

Siden $Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ og $E\,\varepsilon_t = 0$, vil prognosen for μ_t være lik som for Y_t, dvs

$$\hat{\mu}_t(1) = \hat{\mu}_{t-1}(1) + (1-\theta)\left(Y_t - \hat{\mu}_{t-1}(1)\right)$$

Prediksjonsfeil for $\mu_t - \hat{\mu}_t(1)$:

Fra

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

får vi

$$Y_t - \hat{Y}_{t-1}(1) = \mu_t - \underline{\hat{Y}_{t-1}(1)} + \varepsilon_t$$
$$= \mu_t - \hat{\mu}_{t-1}(1) + \varepsilon_t$$

slik at

$$Var\left(Y_t - \hat{Y}_{t-1}(1)\right) = Var\left(\mu_t - \hat{\mu}_{t-1}(1)\right) + Var\,\varepsilon_t + \underbrace{2\,Cov\left(\mu_t - \hat{\mu}_{t-1}(1), \varepsilon_t\right)}_{= E(\underbrace{\mu_t - \hat{\mu}_{t-1}(1)}_{uavh})\varepsilon_t = 0}$$

$\Rightarrow$

$$Var\left(\mu_t - \hat{\mu}_{t-1}(1)\right) = Var\left(Y_t - \hat{Y}_{t-1}(1)\right) - \sigma_\varepsilon^2$$
$$= \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{2+c}{\quad}\right.$$