Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Håvard Rue 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG 75565 Tidsrekker og filterteori
Onsdag 9. desember 1998
Tid: 09:00–14:00

Tilatte hjelpemidler:
Godkjent kalkulator.
Statistiske tabeller og formler, TAPIR.
Et gult ark med egne formler og notater.

Notasjon brukt i denne oppgaven:

- $\{a_t\}$ er en sekvens av uavhengige og normalfordelte (Gaussfordelte) stokastisk variable med forventningsverdi null og varians σ^2.
- B er *backshift*-operatoren, slik at $B^k Z_t \equiv Z_{t-k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- $\widehat{Z}_t(l)$ er prognosen for Z_{t+l} gitt $\{Z_s = z_s, s \leq t\}$.

Oppgave 1 Prognoser i en ARMA$(1, 1)$ modell

La $\{Z_t\}$ være gitt ved

$$(1 - \phi B)Z_t = (1 - \theta B)a_t \tag{1}$$

a) Hva menes med at $\{Z_t\}$ er (2. ordens) svakt stasjonær?
For hvilke verdier av ϕ og θ er $\{Z_t\}$ (2. ordens) svakt stasjonær?

Hva menes med at $\{Z_t\}$ er invertibel?
For hvilke verdier av ϕ og θ er $\{Z_t\}$ invertibel?

Anta nå at $\{Z_t\}$ er en (2. ordens) svakt stasjonær og invertibel prosess.

b) Vis at

$$\text{Var}(Z_t) = \frac{1 + \theta^2 - 2\phi\theta}{1 - \phi^2}\sigma^2$$

og at autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) til $\{Z_t\}$ er gitt ved

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ (\phi - \theta)(1 - \phi\theta)/(1 + \theta^2 - 2\phi\theta) & k = 1 \\ \phi^{k-1}\rho_1 & k \geq 2. \end{cases}$$

c) Finn uttrykk, eventuellt rekursive uttrykk, for l-stegs prognosen $\widehat{Z}_t(l)$ og variansen til l-stegs prognosefeil, for $l = 1, 2, 3, \ldots$.

Oppgave 2 Feilkorreksjonsfilter

La $\{Z_t\}$ være gitt ved

$$(1-\phi B)Z_t = a_t, \qquad |\phi| < 1.$$

der σ^2 er kjent. ϕ er ukjent og er estimert til $\widehat{\phi}$. Anta at $\widehat{\phi} \neq \phi$, slik at

$$\widehat{Z}_t(1) = \widehat{\phi} Z_t,$$

og definer ett stegs prognosefeil $e_t(1)$ som

$$e_t(1) = Z_{t+1} - \widehat{Z}_t(1).$$

Merk: Siden $\widehat{\phi} \neq \phi$ vil **ikke** $\{a_t\}$ være ett-stegs prognosefeil.

a) Finn frekvensspekteret, $f_e(\omega)$, til $\{e_t(1)\}$.

For å forbedre ett-stegs prognosen vil vi filtrere $\{\widehat{Z}_t(1)\}$ gjennom ett enkelt feilkorreksjonsfilter,

$$\widehat{Z}'_t(1) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \widehat{Z}_{t-j}(1), \qquad h_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ \xi, & j=1 \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases}$$

der $\widehat{Z}'_t(1)$ er den nye prognosen. Definer $e'_t(1) = Z_{t+1} - \widehat{Z}'_t(1)$ som ett-stegs prognosefeil for den nye prognosen.

b) Vis at

$$e'_t(1) = (\phi - \widehat{\phi})X_t + a_{t+1}$$

der $\{X_t\}$ er en ARMA$(1,1)$ prosess (definert i Oppgave 1, ligning 1) med parametre ϕ og $\theta = \xi\widehat{\phi}/(\phi - \widehat{\phi})$.

c) Finn frekvensspekteret, $f_{e'}(\omega)$, til $\{e'_t(1)\}$.

d) Finn den ξ som minimerer variansen til ett-stegs prognosefeil, $\mathrm{Var}(e'_t(1))$.
Hva blir $f_{e'}(\omega)$ for den ξ som minimerer $\mathrm{Var}(e'_t(1))$? Kommenter.
Hint: Du kan få bruk for resultatet i Oppgave 1b.

Oppgave 3 Stasjonærløsning til Kalman-rekursjonene

Definer state-space/tilstands-modellen

$$\begin{aligned} x(k) &= \phi x(k-1) + w(k-1) \\ z(k) &= x(k) + v(k) \end{aligned} \tag{2}$$

der $|\phi| < 1$. Vi antar at prosessene startet i $k = -\infty$ slik at stasjonærtilstand er oppnådd. De Gaussiske støyleddene har Var$(w(k-1)) = Q > 0$, Var$(v(k)) = R > 0$ og forventningsverdi lik 0. Både $x(k)$ og $z(k)$ er univariate (dimensjon lik 1) og kun $z(k)$-ene er observert.

Definer $\underline{z}(l) = (\ldots, z(0), z(1), \ldots, z(l))^T$, og $\widehat{x}(k|k) = \mathrm{E}(x(k) \mid \underline{z}(k))$.

a) Forklar hvorfor stasjonærløsningen av Kalman-rekursjonene gir at

$$\widehat{x}(k|k) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z(k-j)$$

for noen konstanter $\{b_j, j = 0, 1, 2 \ldots\}$.

Finn uttrykk for $\{b_j, j = 0, 1, 2 \ldots\}$.

b) Anta $\underline{z}(n)$ er observert.

Forklar hvordan man kan gjøre bruk av Kalman-rekursjonene til å finne l-stegs prognosen for $z(n+l)$,

$$\mathrm{E}(z(n+l)|\underline{z}(n))$$

samt varians til prognosefeilen.

Oppgave 4 Estimering i en state-space modell

En realisasjon av state-space/tilstands-modellen definert i Oppgave 3 (med lengde 100) gav følgende estimat på varians og autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) til $\{z(k)\}$: $\widehat{\mathrm{Var}}(z(k)) = 3.51$, $\widehat{\rho}_z(1) = 0.55$, $\widehat{\rho}_z(2) = 0.44$, $\widehat{\rho}_z(3) = 0.30$, $\widehat{\rho}_z(4) = 0.21$, $\widehat{\rho}_z(5) = 0.17$, og $\widehat{\rho}_z(6) = 0.14$.

a) Bruk de estimerte verdier til å gi rimelige estimat på ϕ, R og Q.

Eksamen i fag 75565

Tidsrekker & filterteori

9 desember '98

#1.

a) **2. ordens svakt stasjonær:**

$E Z_t$ eksisterer og avh. ikke av t

$Cov(Z_t, Z_{t+k})$ eksisterer og avh kun av k

Krav på ϕ: $|\phi| < 1$. Ingen krav på θ.

Invertibel: kan skrives som en AR(∞) prosess

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t-j} + a_t$$

Krav til θ: $|\theta| < 1$, Ingen krav på ϕ.

b) Se bok side 58-59.

Ligningen:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 \left(1 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1)\right)$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \qquad k > 1$$

gir det ønskede svar.

c) $$Z_{t+1} = \phi Z_t + a_{t+1} - \theta a_t$$

Se bok side 91–93 eksempel 5.1

1. stegs prognose:

$$Z_t(1) = E(Z_{t+1} \mid Z_t, Z_{t-1}, \dots)$$
$$= E(\phi Z_t + a_{t+1} - \theta a_t \mid Z_t, Z_{t-1}, \dots)$$
$$= \phi Z_t - \theta \hat{a}_t \qquad (*)$$

der $\hat{a}_t = Z_t - Z_{t-1}(1)$.

l. stegs prognose: $l \geq 2$

$$Z_t(l) = E(Z_{t+l} \mid Z_t, Z_{t-1}, \dots)$$
$$= E(\phi Z_{t+l-1} + a_{t+l} - \theta a_{t+l-1} \mid Z_t, Z_{t-1}, \dots)$$
$$= E(\phi Z_{t+l-1} \mid Z_t, Z_{t-1}, \dots)$$
$$= \phi Z_t(l-1)$$

som er en rekursiv def av l-stegs prognose: dvs

$$Z_t(2) = \phi Z_t(1)$$
$$Z_t(3) = \phi Z_t(2) = \phi^2 Z_t(1)$$
$$\vdots$$
$$Z_t(l) = \phi^{l-1} Z_t(1)$$

der $Z_t(1)$ er gitt ved (*).

Prognose-feilen finnes ved å skrive dette som en $MA(\infty)$ prosess.

$$Z_t = \frac{1-\theta B}{1-\phi B} a_t$$

$$= (1-\theta B)(1+\phi B+\phi^2 B^2+\phi^3 B^3+\cdots) a_t$$

$$= (1+(\phi-\theta)B+\phi(\phi-\theta)B^2+\phi^2(\phi-\theta)B^3+\cdots) a_t$$

dvs

$$\mathrm{Var}(Z_{t+1}-Z_t(1)) = \mathrm{Var}\, a_{t+1} = \underline{\underline{\sigma^2}}$$

$$\mathrm{Var}(Z_{t+2}-Z_t(2)) = \mathrm{Var}(a_{t+2}+(\phi-\theta)a_{t+1}) = \underline{\underline{\sigma^2(1+(\phi-\theta)^2)}}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Var}(Z_{t+\ell}-Z_t(\ell)) = \mathrm{Var}(a_{t+\ell}+(\phi-\theta)a_{t+\ell-1}+\cdots+\phi^{\ell-2}(\phi-\theta)a_{t+1})$$

$$= \underline{\underline{\sigma^2\left[1+(\phi-\theta)^2\{1+\phi^2+\phi^4+\cdots+\phi^{2\ell-4}\}\right]}}$$

#2

$$Z_t(1) = \hat{\phi} Z_t \quad , \quad \hat{\phi} \neq \phi$$

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t , \quad |\phi| < 1.$$

a)

$$e_t(1) = Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1)$$

$$= Z_{t+1} - \hat{\phi} Z_t = (1 - \hat{\phi} B) Z_{t+1}$$

som er en filtrering av $\{Z_{t+1}\}$, med overføringsfunksjon $\left|1 - \hat{\phi} e^{-i\omega}\right|^2$

dvs

$$f_e(\omega) = \left|1 - \hat{\phi} e^{-i\omega}\right|^2 f_Z(\omega)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1 + \hat{\phi}^2 - 2\hat{\phi}\cos\omega}{1 + \phi^2 - 2\phi\cos\omega}}} \quad , |\omega| \le \pi$$

b)

$$Z_t'(1) = \hat{Z}_t(1) + \xi \hat{Z}_{t-1}(1)$$

$$= \hat{\phi} Z_t + \xi \hat{\phi} Z_{t-1}$$

dvs

$$e_t'(1) = Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1)$$

$$= \underline{Z_{t+1} - \hat{\phi} Z_t - \xi \hat{\phi} Z_{t-1}} \quad (*)$$

$$= \phi Z_t + a_{t+1} - \hat{\phi} Z_t - \xi \hat{\phi} Z_{t-1}$$

$$= (\phi - \hat{\phi}) Z_t - \xi \hat{\phi} Z_{t-1} + a_{t+1}$$

$$= (\phi - \hat{\phi}) \underbrace{\left[Z_t - \frac{\xi \hat{\phi}}{\phi - \hat{\phi}} Z_{t-1} \right]}_{= X_t} + a_{t+1}$$

Mi vise at

$$X_t = Z_t - \underbrace{\xi \frac{\phi}{\phi - \tilde{\phi}}}_{\theta} Z_{t-1}$$

$$= Z_t - \theta Z_{t-1}$$

er en ARMA(1,1) prosess.

enten via

1)

$$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$$

$$= \phi Z_{t-1} + a_t - \theta \phi Z_{t-2} - \theta a_{t-1}$$

$$= \phi \underbrace{(Z_{t-1} - \theta Z_{t-2})}_{X_{t-1}} + a_t - \theta a_{t-1}$$

$$= \phi X_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

eller

2) $\{X_t\}$ er $\{Z_t\}$ filtrert gjennom filteret

$1 - \xi \frac{\phi}{\phi - \tilde{\phi}} B$, som har overføringsfunksjon

$|1 - \theta e^{-i\omega}|^2$, dvs $\left(\theta = \xi \frac{\phi}{\phi - \tilde{\phi}}\right)$

$$f_X = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1 + \theta^2 - 2\theta \cos \omega}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos \omega}$$

som er spekteret til en ARMA(1,1) prosess.

c) frekvensspekteret til $f_{e'}$.

MRK

$$f_{e'} \neq (\phi - \hat{\phi})^2 f_x + f_a$$

fordi $\{x_t\}$ og $\{a_t\}$ ikke er uavhengige prosesser, det er ikke nok at X_t og a_{t+1} er uavhengige!!!

gå tilbake til (*) side (4),

$$e'_t(1) = z_{t+1} - \hat{\phi} z_t - \xi \hat{\phi} z_{t-1}$$

$$= (1 - \hat{\phi} B - \xi \hat{\phi} B^2) z_{t+1}$$

dvs filtrert versjon av z_{t+1}. Filteret har overføringsfunksjon

$$\alpha(\omega) = |1 - \hat{\phi} e^{-i\omega} - \xi \hat{\phi} e^{-2i\omega}|^2$$

$$= 1 + \hat{\phi}^2 + \xi^2 \hat{\phi}^2 - 2\hat{\phi}(1 - \xi\hat{\phi}) \cos\omega - 2\xi\hat{\phi} \cos 2\omega$$

dvs

$$f_{e'}(\omega) = \alpha(\omega) f_z(\omega)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1 + \hat{\phi}^2 + \xi^2\hat{\phi}^2 - 2\hat{\phi}(1 - \xi\hat{\phi})\cos\omega - 2\xi\hat{\phi}\cos 2\omega}{1 + \phi^2 - 2\phi\cos\omega}$$

d) $\mathrm{Var}\left(e_t^i(1)\right) = \mathrm{Var}\left((\phi-\hat{\phi})X_t + a_{t+1}\right)$

$$= (\phi-\hat{\phi})^2\,\mathrm{Var}(X_t) + \sigma^2$$

$$= \underline{(\phi-\hat{\phi})^2\,\frac{1+\theta^2-2\phi\theta}{1-\phi}\,\sigma^2 + \sigma^2}$$

Minimer dette mhp θ og får $\theta = \phi$

dvs $\theta = \dfrac{\xi\hat{\phi}}{\phi-\phi} = \phi \Rightarrow \underline{\xi = \dfrac{\phi}{\hat{\phi}}(\phi-\hat{\phi})}.$

Når $\theta=\phi$ blir X_t hvit støy, $\{a_t\}$, og

$$e_t^i(1) = (\phi-\hat{\phi})\,a_t + a_{t+1}$$

$$= \left(1 + B(\phi-\hat{\phi})\right)a_{t+1}$$

dvs en MA(1) prosess med parameter $-(\phi-\hat{\phi})$.

$$\underline{\underline{f_{e^i}(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left[1+(\phi-\hat{\phi})^2 + 2(\phi-\hat{\phi})\cos\omega\right]}}$$

Dvs, det er ennå struktur igjen i støyen.

$$\underline{\underline{\mathrm{Var}\left(e_t(1)\right) = \left[1+(\phi-\hat{\phi})^2\right]\sigma^2}}$$

Oppgave 3

~~Dette spm har vi regnet som en ... på forelesning~~

a) $$\hat{x}(k|k) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \, z(k-j) \quad :$$

siden $$\hat{x}(k|k) = E\left(x(k) \mid \underset{\sim}{z}(k)\right)$$

og Kalman-filteret er utledet under (simultant) Gaussiske antagelser, er betr. forventing lineær i $\underset{\sim}{z}(k)$, dvs

$$\hat{x}(k|k) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) \, z(k-j)$$

men $b_j(k) = b_j$ ~~siden vi~~ når vi har stasjonær løsning.

$\{b_j : j = 0, 1, 2, \ldots\}$:

$$x(k) = \overset{\Phi = \phi}{\phi} \, x(k-1) + \underbrace{w(k-1)}_{\text{Var} = q}$$

$$z(k) = \underbrace{1}_{H=1} \cdot x(k) + \underbrace{v(k)}_{\text{var} = R}$$

dvs Kalman-rekursjonene gir følgende (stasjonære) ligningene:

$$\hat{x}(k|k-1) = \phi\, \hat{x}(k-1|k-1)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K\left(z(k) - \hat{x}(k|k-1)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} P(k|k-1) &= \phi^2 P(k-1|k-1) + Q \\ S &= P(k|k-1) + R \\ K &= P(k|k-1)/S \\ P(k|k) &= (1-K)\, P(k|k-1) \end{aligned}\right\} \circledast$$

La $P(k|k) \overset{\text{def}}{=} P_0$ og $P(k|k-1) = P_1$.

$\circledast$ gir

$$\begin{aligned} P_1 &= \phi^2 P_0 + Q \\ S &= P_1 + R \\ K &= P_1 / S \\ P_0 &= (1-K)\, P_1 \end{aligned}$$

vi trenger å løse ut K.

$$K = \frac{P_1}{S} = \frac{P_1}{P_1 + R}$$

dvs trenger P_1:

$$\begin{aligned} P_1 &= \phi^2 P_0 + Q \\ &= \phi^2 (1-K) P_1 + Q \\ &= \phi^2 \left(1 - \frac{P_1}{P_1+R}\right) P_1 + Q \\ &= \phi^2 \cdot \frac{R}{P_1+R} \cdot P_1 + Q \end{aligned}$$

la P_1 være den positive røtten av denne 2. gradsligningen.
(den andre røtten er negativ).

Dvs
$$K = \frac{P_1}{P_1 + R}$$

og

$$\hat{x}(k|k-1) = \phi\, \hat{x}(k-1|k-1).$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K\,(z(k) - \hat{x}(k|k-1))$$

som gir

$$\hat{x}(k|k) = \phi\, \hat{x}(k-1|k-1) + K\,(z(k) - \phi\, \hat{x}(k-1|k-1))$$

$$= \phi(1-K)\, \hat{x}(k-1|k-1) + K\, z(k)$$

Så bruker vi at $\hat{x}(k|k) = \sum_j b_j\, z(k-j)$

$$\sum b_j\, z(k-j) = \phi(1-K) \sum b_j\, z(k-j-1) + K\, z(k)$$

dvs

$$b_0 = K$$

$$b_1 = \phi(1-K)\, b_0 = \phi(1-K) K$$

$$b_2 = \phi(1-K)\, b_1 = \phi(1-K)\, \phi(1-K) K$$

$$= (\phi(1-K))^2 K$$

og

$$b_j = \cancel{\phi(1-K)}\; [\phi(1-K)]^j K.$$

dvs

$$\hat{x}(k|k) = \sum_{j=0}^{\infty} [\phi(1-K)]^j K \cdot z(k-j)$$

b)

$$E(z(n+l) \mid \underset{\sim}{z}(n))$$

$$= E(\ x(k+l) + v(k+l) \mid \underset{\sim}{z}(n))$$

$$= \underline{\hat{x}(k+l \mid n)}$$

, dvs nok å finne prognosen for x-prosessen.

innfør

$$z(k) = H(k)\, x(k) + v(k)$$

der $H(k) = 1 \quad k \le n$

$\qquad\quad 0 \quad k > n$

og kjør Kalmanfilteret fremover i tid.

og ~~ber~~ beregn. $\hat{x}(k \mid k) \quad k \geq n$

som vil bli $\hat{x}(n+l \mid n)$ siden $z(n+1), \ldots$ mangler.

og $P(k \mid k) = \text{Var}(\hat{x}(k \mid k))$

vil da bli lik ~~Pktnt~~ $\underline{\underline{P(n+l \mid l)}}$

og da vil prognosefeilen være gitt ved.

$$\text{Var}\left(z(n+l) - E(z(n+l) \mid \underset{\sim}{z}(n))\right)$$

$$= \underline{\underline{P(n+l \mid l) + R.}}$$

#4 Momenter av $\{z(k)\}$ er gitt med

$$\widehat{\text{Var}\, z(k)} = 3.51.$$

$\hat{\rho}_1^z = 0.55$ etc, indikerer at vi må bruke noen moment estimatorer, for å gi "rimelige" estimat på ϕ, R og q.

Så vi får vel regne ut $\text{Var}\, z(k)$ og ACF til $z(k)$ og se hva som skjer.

$$\text{Var}(z(k)) = \text{Var}\, x(k) + \text{Var}\, v(k)$$

$$= \underline{\frac{q}{1-\phi^2} + R}$$

$$\text{Cov}(z(k), z(k+j)) = \text{Cov}(x(k)+v(k),\ x(k+j)+v(k+j))$$

$$= \text{Cov}(x(k), x(k+j))$$

$$= \frac{q}{1-\phi^2}\phi^j \qquad \underline{j \geq 0}$$

dvs

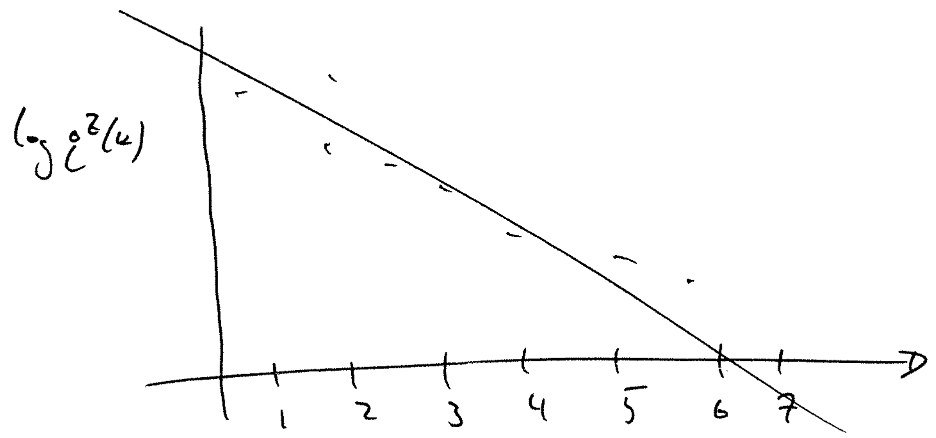
$$\rho^{z(k)} = \underline{\frac{\dfrac{q}{1-\phi^2}\phi^k}{\dfrac{q}{1-\phi^2} + R}}$$

$$= \underline{\frac{\phi^k}{1 + \frac{R}{q}(1-\phi^2)}}$$

dvs

$$\log \hat{\varrho}^{Z}(k) = (\log q)\cdot k - \log\left(1 + \frac{R}{Q}(1-q^2)\right)$$

så en rett linjetilpassning vil ved funksjon ≈ ok.



som gir "a" = −0.287 ; "b" = −0.315

$y = ax + b$ } eller på øyemål.

og dermed

$$\hat{q} = e^{-0.287} \approx \underline{\underline{0.75}}$$

$$\widehat{\left(\frac{R}{Q}\right)} = \frac{e^{0.315} - 1}{1 - 0.75^2} = \underline{0.85}$$

og $\widehat{\text{Var}}(Z(k)) = 3.51$

$$= \frac{Q}{1-0.75^2} + 0.85 R$$

$$= Q\ 3.136 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{Q} = 1.12}}$$

og $\underline{\hat{R} = 0.95}$

(det ble jo ikke så verst: simulert med $\underline{q = 0.8,\ Q = R = 1}$.)