Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Arvid Næss 73 59 70 53/ 99 53 83 50

EKSAMEN I EMNE TMA4285 TIDSREKKEMODELLER

17. desember 2005
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Ett gult A5-ark med stempel med egne formler og notater

Sensuren faller: 14. januar 2005

NB: Alle svar skal begrunnes.

Notasjon brukt i dette oppgavesettet:

- Z_t er hvit støy med varians σ^2, dvs. $Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.
- B er *backshift*-operatoren, slik at $B^j X_t \equiv X_{t-j}$, $j \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- ACVF = autokovarians-funksjon, ACF = autokorrelasjons-funksjon.

Oppgave 1

Anta at tidsrekken X_t er en ARMA$(2,1)$-prosess definert ved

$$\phi(B)\, X_t = \theta(B)\, Z_t\,; \quad t \in \mathbf{Z} \tag{1}$$

hvor AR-polynomet $\phi(z) = 1 - \phi^2\, z^2$, og MA-polynomet $\theta(z) = 1 + \theta\, z$.

a) Hvilke krav må stilles til parametrene ϕ og θ for at X_t skal være en ARMA$(2,1)$-prosess?

b) Hva betyr det at X_t er en kausal tidsrekke, og hvordan kan det uttrykkes? Hva med invertibel?

Hvilke tilleggskrav må ϕ og θ oppfylle for at X_t skal være en kausal og invertibel tidsrekke?

I resten av oppgaven skal vi anta at $0 < |\phi| < 1$.

c) Bestem ACVF $\gamma(h)$ til X_t. Vis først at

$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{1+\theta^2}{1-\phi^4} \tag{2}$$

og

$$\gamma(1) = \sigma^2 \frac{\theta}{1-\phi^2} \tag{3}$$

d) Vis at for $\theta = 0$, gjelder ligningen

$$\gamma(2k) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^4}\, \phi^{2|k|}\,, \quad k \in \mathbf{Z} \tag{4}$$

Hva blir $\gamma(2k+1)$ for $k \in \mathbf{Z}$?

Oppgave 2

Med utgangspunkt i 'observasjonene' $X_1, X_2, \ldots, X_n$ fra en stasjonær tidsrekke X_t, kan ACVF $\gamma(h)$ og ACF $\rho(h)$ estimeres som følger $(h = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_{t+h} - \bar{X}_n)(X_t - \bar{X}_n), \tag{5}$$

og

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}, \tag{6}$$

som kan benyttes dersom h ikke er for stor i forhold til n, f.eks. $0 \le h < n/4$. Vi skal nå anta følgende resultat: For store n vil estimatoren $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \big(\hat\rho(1), \hat\rho(2), \ldots, \hat\rho(k)\big)'$ være tilnærmet normalfordelt $N(\boldsymbol{\rho}, \frac{1}{n}W)$, hvor $\boldsymbol{\rho} = \big(\rho(1), \rho(2), \ldots, \rho(k)\big)'$ og $W = (w_{ij})$ er en $k \times k$ kovariansmatrise gitt av Bartletts formel

$$w_{ij} = \sum_{l=1}^{\infty} \{\rho(l+i) + \rho(l-i) - 2\rho(i)\,\rho(l)\} \cdot \{\rho(l+j) + \rho(l-j) - 2\rho(j)\,\rho(l)\} \tag{7}$$

Anta at for observasjonene $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, har vi funnet at $\hat\rho(1) = 0.438$ og $\hat\rho(2) = 0.145$.

a) Anta at observasjonene er generert av en AR(1)-prosess: $X_t = \phi\, X_{t-1} + Z_t$, hvor $|\phi| < 1$. Sett opp sammenhengen mellom $\rho(h)$ og ϕ, og vis at

$$\mathrm{Var}[\hat\rho(1)] \approx \frac{1}{n}\big(1 - \phi^2\big) \tag{8}$$

Bestem et tilsvarende uttrykk for $\mathrm{Var}[\hat\rho(2)]$. Hint: Bruk f.eks. den observerte verdien $\hat\rho(2) = 0.145$ til å begrunne approksimasjonene.

Konstruér så et tilnærmet 95% konfidensintervall for både $\rho(1)$ og $\rho(2)$. Bruk disse to konfidensintervallene til å diskutere om observasjonene er konsistente med en AR(1)-modell med $\phi = 0.8$.

b) Anta at observasjonene er generert av en MA(1)-prosess. Konstruér et tilnærmet 95% konfidensintervall for både $\rho(1)$ og $\rho(2)$. Bruk disse to konfidensintervallene til å diskutere om observasjonene er konsistente med en MA(1)-modell med $\theta = 0.6$.

OPPGITT: 95% konfidens-grenser for en $N(0,1)$-variabel er ± 1.96.

Oppgave 3

a) Anta at tidsrekken X_t, $t \in \mathbf{Z}$, er (svakt) stasjonær. Vis at $\nabla^k X_t = (1-B)^k X_t$ også er en stasjonær tidsrekke for enhver $k = 1, 2, \ldots$.

b) La tidsrekken Y_t være definert ved ligningen

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1\, t + \beta_2\, t^2 + X_t\,, \quad t \in \mathbf{Z},\ \beta_2 > 0, \tag{9}$$

hvor X_t er stasjonær. Fins det et helt tall k_0 slik at $\nabla^k Y_t$ er stasjonær for $k \ge k_0$, mens $\nabla^k Y_t$ ikke er stasjonær for $k < k_0$. Hva er i så fall k_0?