Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 38

EKSAMEN I EMNE SIF5079 TIDSREKKER OG FILTERTEORI

Mandag 4. august 2003
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Ett gult ark (A5 med stempel) med egne formler og notater.

Sensur: 25. august 2003.

Merk: Alle svar skal begrunnes!

Oppgave 1

La $\{x_t\}$ være gitt ved

$$x_t = \phi x_{t-1} + \omega_t + \theta(\omega_{t-1} + \omega_{t-2}), \tag{1}$$

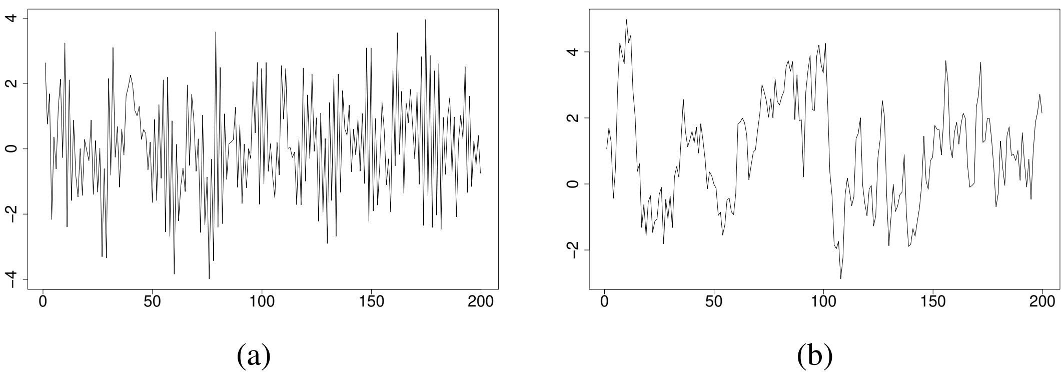
der ϕ og θ er parametre og $\{\omega_t\}$ er hvit støy med $\text{Var}(\omega_t) = \sigma_\omega^2$.

a) Skriv modellen på standard ARMA-form,

$$\phi(B)x_t = \theta(B)\omega_t,$$

der B betegner *backshift*-operatoren. Dvs. gi operatorene $\phi(B)$ og $\theta(B)$ for modell (1).

Hva menes med at en stokastisk prosess er svakt stasjonær?



Figur 1: To simuleringer fra modell (1). Den ene har benyttet parameterverdier $\phi = -0.7$ og $\theta = 0.8$, mens den andre har benyttet $\phi = 0.9$ og $\theta = -0.1$. Merk at det ikke opplyses om hvilke parameterverdier som hører sammen med hvilken av simuleringene.

b) Hva menes med at en ARMA-modell er kausal?
For hvilke verdier av ϕ og θ er $\{x_t\}$ kausal?

Hva menes med at en ARMA-modell er invertibel?
For hvilke verdier av ϕ og θ er $\{x_t\}$ invertibel?

I resten av oppgaven skal vi anta at $\{x_t\}$ er invertibel og kausal. Som kjent betyr dette spesielt at $\{x_t\}$ kan skrives på formen

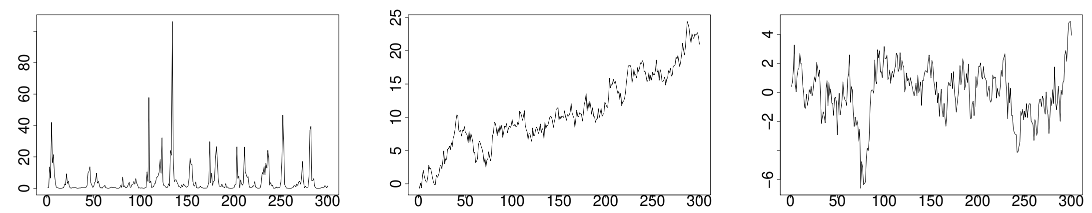
$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \omega_{t-j}. \tag{2}$$

c) Vis at koeffisientene $\{\psi_j\}$ i ligning (2) for modell (1) er gitt ved

$$\psi_0 = 1 \ , \ \psi_1 = \theta + \phi \ \text{ og } \ \psi_j = \phi^j \left(1 + \frac{\theta(1+\phi)}{\phi^2}\right) \ \text{ for } j = 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

d) Bestem variansen og ett-stegs korrelasjon for $\{x_t\}$.

Figur 1(a) og (b) viser to simuleringer fra modell (1). Den ene simuleringen er gjort med $\phi = -0.7$ og $\theta = 0.8$, mens den andre har benyttet $\phi = 0.9$ og $\theta = -0.1$. Hvilket av de to parametersettene er benyttet i figur 1(a) og hvilket er benyttet i figur 1(b)? [Forklar hvordan du resonnerer deg frem til svaret!]



(a) (b) (c)

Figur 2: Tre observerte tidsrekker.

Oppgave 2

a) Figur 2 viser tre observerte tidsrekker. For hver av disse tre tidsrekkene, diskuter kort om det er rimelig å tilpasse en ARMA(p, q)-modell? (Husk: Begrunn svarene.)

Hvis du for en eller flere av tidrekkene i figur 2 ikke vil passe en ARMA(p,q)-modell, har du forslag til hva man kan gjøre med disse før man eventuelt tilpasser en ARMA(p,q)-modell? (Husk: Begrunn svarene.)

b) For en *generell* tidsrekke $\{x_t\}$, definer partiell autokorrelasjonsfunksjon.

Benytt denne definisjonen til å regne ut ett- og to-stegs partiell autokorrelasjonsfunksjon for en kausal AR(1)-modell.

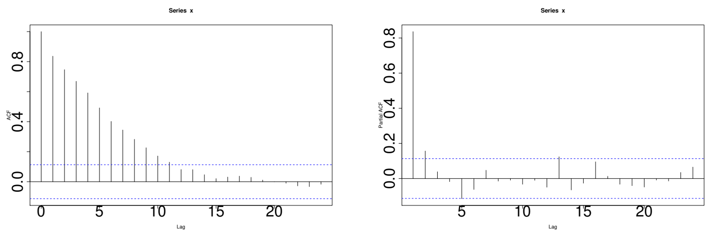
Videre i denne oppgaven skal vi se på tidsrekka i figur 2(c). Uansett hva du svarte i punkt **a**) skal vi tilpasse en ARMA(p,q)-modell til denne. Figur 3 viser estimert autokorrelasjonsfunksjon og estimert partiell autokorrelasjonsfunksjon.

c) Foreslå verdier for p og q for en ARMA(p,q)-modell for tidsrekka i figur 2(c). (Husk: Begrunn svaret.)

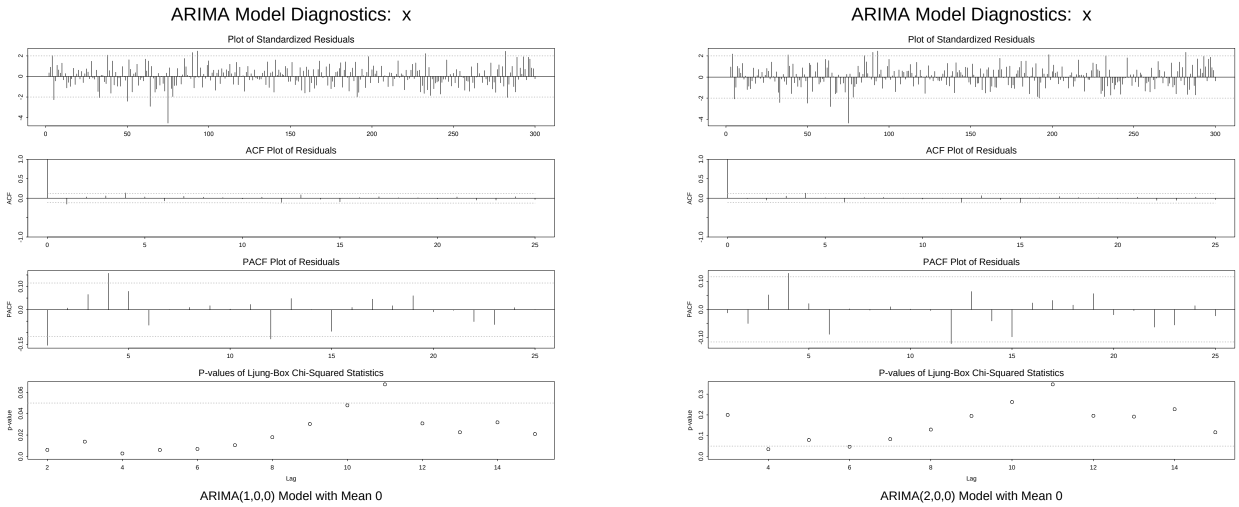
Uansett hvilke verdier du foreslår for p og q, anta at vi nå skal tilpasse en stasjonær ARMA(1,0)-modell og at vi skal estimere parametre ved maximum likelihood. Vi skal da forutsette at ω_t'ene er normalfordelte. Bestem et uttrykk for likelihood-funksjonen for denne modellen når observert tidsrekke er $x_1, x_2, \ldots, x_{300}$.

I tillegg til ARMA(1,0)-modellen ble også en ARMA(2,0)-modell tilpasset den observerte tidsrekka. Modelldiagnoseringsplott (utskrift fra Splus) for de to tilpassede modellene er vist i figur 4. AIC-verdiene ble henholdsvis 845.45 for ARMA(1,0)-modellen og 837.19 for ARMA(2,0)-modellen.

d) Kommenter diagnoseringsplottene og AIC-verdiene. Hvilken av de to tilpassede modellene vil du foretrekke? (Husk: Begrunn svaret.)



Figur 3: Estimert autokorrelasjonsfunksjon og estimert partiell autokorrelasjonsfunksjon for tidsrekka i figur 2(c).



Figur 4: Modelldiagnoseringsplott for de tilpassede ARMA$(1,0)$- og ARMA$(2,0)$-modellene.

Oppgave 3

Anta følgende skalare state-space-modell

$$x_t = \phi x_{t-1} + \omega_t, \tag{4}$$
$$y_t = x_t + v_t, \tag{5}$$

der $|\phi| < 1$ og $\{\omega_t\}$ og $\{v_t\}$ er to uavhengige Gaussiske hvit støy-prosesser med henholdsvis $\mathrm{Var}(\omega_t) = \sigma^2$ og $\mathrm{Var}(v_t) = 1$.

a) Utled rekursjonsligninger for å beregne prediksjoner $x_{n+h}^n = \mathrm{E}[x_{n+h}|y_1, y_2, \ldots, y_n]$ og tilhørende prediksjonsvarians $P_{n+h}^n = \mathrm{Var}[x_{n+h}|y_1, y_2, \ldots, y_n]$ for $h = 1, 2, \ldots$. Du kan forutsette at $x_n^n = \mathrm{E}[x_n|y_1, y_2, \ldots, y_n]$ og $P_n^n = \mathrm{Var}[x_n|y_1, y_2, \ldots, y_n]$ allerede er beregnet.

b) Vis at $\{y_t\}$ følger en ARMA(p,q)-modell. Bestem ordenene p og q og de øvrige parametre i ARMA-modellen.