Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 38/73 94 27 25

EKSAMEN I EMNE SIF5079 TIDSREKKER OG FILTERTEORI

Lørdag 30. november 2002
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Ett gult ark (A5 med stempel) med egne formler og notater.

Sensur: 21. desember 2002.

Merk: Alle svar skal begrunnes !

Merk: Kalmanfilterligningene og noen summeformler som dere kan få bruk for er oppgitt på siste side av oppgavesettet.

Oppgave 1

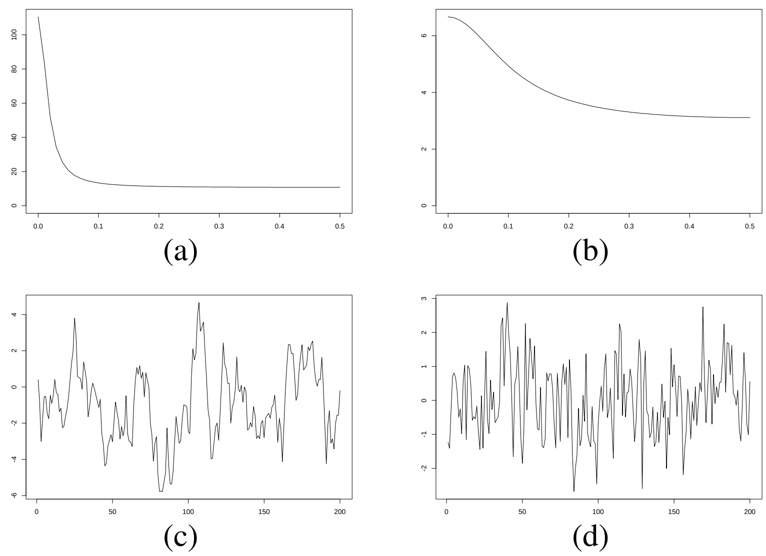
La $\{x_t\}$ følge en ARMA(1,1)-modell, dvs

$$(1 - \phi B)x_t = (1 + \theta B)\omega_t, \tag{1}$$

der B betegner *backshift*-operatoren, dvs. $B^k x_t \equiv x_{t-k}$, og $\{\omega_t\}$ er hvit støy med $\text{Var}(\omega_t) = \sigma_\omega^2$.

a) Hva menes med at $\{x_t\}$ er invertibel?
For hvilke verdier av ϕ og θ er $\{x_t\}$ invertibel?

Hva menes med at $\{x_t\}$ er kausal?
For hvilke verdier av ϕ og θ er $\{x_t\}$ kausal?



Figur 1: (a) $f(\nu)$ for en AR(1)-modell med $\sigma_w^2 = 1$ og $\phi = 0.9$, (b) $f(\nu)$ for en AR(1)-modell med $\sigma_w^2 = 1$ og $\phi = 0.5$, (c) En realisasjon fra en AR(1)-modell med $\sigma_w^2 = 1$ og $\phi = 0.9$, (d) En realisasjon fra en AR(1)-modell med $\sigma_w^2 = 1$ og $\phi = 0.5$.

I resten av oppgaven skal vi anta at $\{x_t\}$ er invertibel og kausal. Som kjent betyr dette spesielt at $\{x_t\}$ kan skrives på formen

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \omega_{t-j}. \tag{2}$$

b) Vis at koeffisientene $\{\psi_j\}$ i ligning (2) er gitt ved

$$\psi_0 = 1 \;\text{ og }\; \psi_j = \phi^{j-1}(\theta + \phi) \;\text{ for } j = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

c) Utled autokovariansfunksjonen, $\gamma(h)$, for x_t.

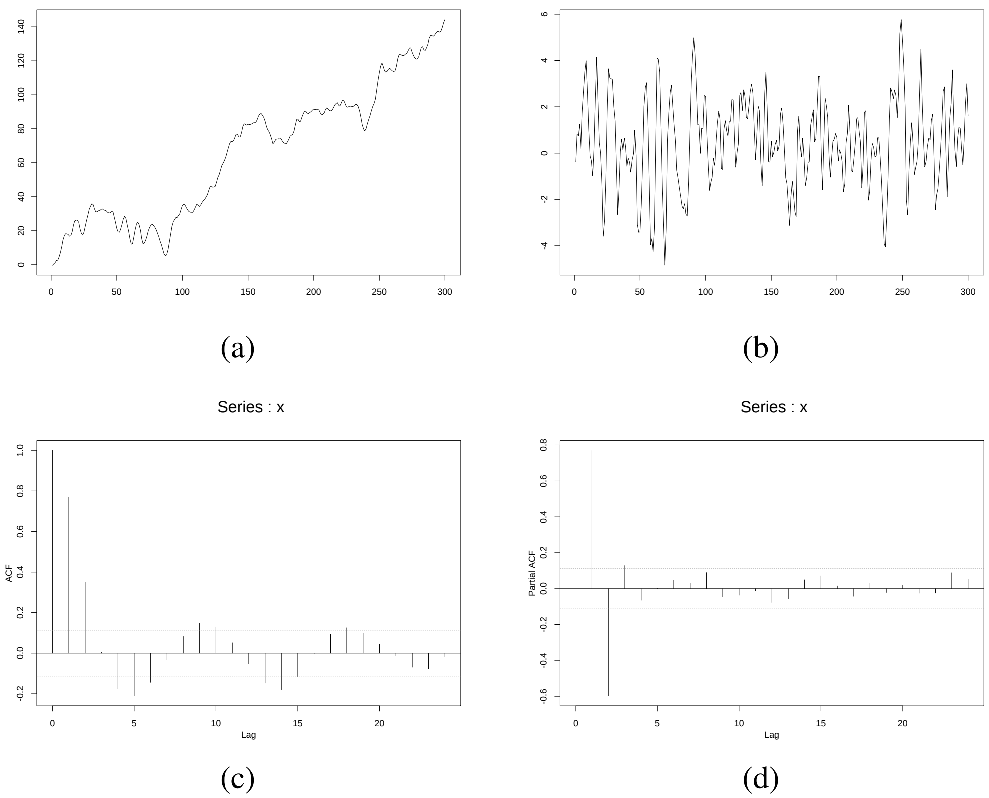
Vis spesielt at når $\theta = 0$ blir

$$\gamma(h) = \sigma_w^2 \left(1 + \frac{\phi^2}{1 - \phi^2}\right) \phi^{|h|}. \tag{4}$$

I det siste punktet skal vi anta at $\theta = 0$, slik at x_t følger en ren AR(1)-modell. Autokovariansfunksjonen er dermed som gitt i ligning (4).

d) Bestem spektraltettheten, $f(\nu)$, for x_t.

Figur 1 viser $f(\nu)$ for $\phi = 0.9$ og for $\phi = 0.5$. Simuleringer fra de to modellene vises også. Forklar den kvalitative forskjellen mellom de to realisasjonene ut fra tilhørende $f(\nu)$.



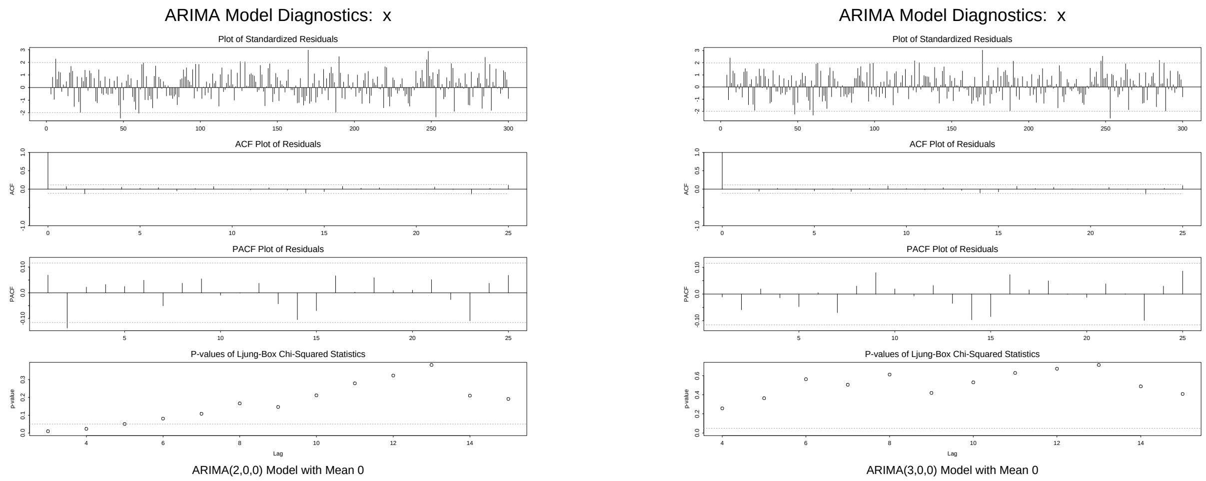
Figur 2: (a) Observert tidsrekke, z_t. (b) Differensiert tidsrekke, $x_t = \nabla z_t$. (c) Estimert autokorrelasjonsfunksjon for x_t. (d) Estimert partiell autokorrelasjonsfunksjon for x_t.

Oppgave 2

Figur 2(a) viser en observert tidsrekke, $z_t; t = 1, 2, \ldots, 300$. Tilhørende differensierte tidsrekke, $x_t = \nabla z_t$ er vist i figur 2(b). Figur 2(c) og (d) viser henholdsvis estimert autokorrelasjonsfunksjon og estimert partiell autokorrelasjonsfunksjon for den differensierte tidsrekka, x_t.

a) Hvorfor er det ikke rimelig å tilpasse en ARMA(p,q)-modell til den observerte tidsrekka z_t? Finner du det naturlig å tilpasse en ARMA(p,q)-modell til den differensierte tidsrekka? (Husk: Begrunn svarene.)

Foreslå verdier for p og q for en ARMA(p,q)-modell for x_t. (Husk: Begrunn svaret.)



Figur 3: Modelldiagnoseringsplott for de tilpassede AR(2)- og AR(3)-modellene.

Anta at vi velger å tilpasse en AR(2)-modell til tidsrekka x_t. For å estimere parametre skal vi benytte momentmetoden . Fra tidsrekka x_t får vi $\widehat{\gamma}(0) = 3.566$, $\widehat{\gamma}(1) = 2.747$ og $\widehat{\gamma}(2) = 1.248$. Vi antar det kjent at $\mathrm{E}(x_t) = 0$.

b) Forklar kort ideen med momentmetoden.

Utled et sett av homogene differanseligninger for $\gamma(h)$ i en AR(2)-modell.

For tidsrekka x_t, benytt momentmetoden til å finne estimater for σ_w^2, ϕ_1 og ϕ_2. (Det er tilstrekkelig at du finner et ligningssystem som gir estimatene, dvs. det kreves ikke at du løser ligningssystemet.)

I tillegg til AR(2)-modellen ble også en AR(3)-modell tilpasset x_t. Modelldiagnoseringsplott (utskrift fra Splus) for de to tilpassede modellene er vist i figur 3. AIC-verdiene ble 835.57 for AR(2)-modellen og 827.89 for AR(3)-modellen.

c) Kommenter diagnoseringsplottene og AIC-verdiene. Hvilken av de to tilpassede modellene vil du foretrekke?

Oppgave 3

Anta følgende skalare state-space-modell

$$
\begin{aligned}
x_t &= \phi x_{t-1} + \omega_t, \qquad (5)\\
y_t &= x_t + v_t, \qquad (6)
\end{aligned}
$$

der $|\phi| < 1$ og $\{\omega_t\}$ og $\{v_t\}$ er to uavhengige Gaussiske hvit støy-prosesser med henholdsvis $\text{Var}(\omega_t) = 1$ og $\text{Var}(v_t) = \sigma^2$.

a) Benytt kalmanfilterligningene til å bestemme

$$
P \equiv \lim_{t\to\infty} P_t^t \quad \text{og} \quad K \equiv \lim_{t\to\infty} K_t \qquad (7)
$$

uttrykt ved ϕ og σ^2.

Vis spesielt at med $\phi = 0.9$ og $\sigma^2 = 5^2$ blir $P = 3.043$ og $K = 0.1217$.

Anta at t er stor slik at stasjonærløsningen du fant i punkt **a**) gjelder. Da vil kalmanfilteret være et lineært filter slik at sammenhengen mellom $\{y_t\}$ og $\{x_t^t\}$ kan skrives på formen

$$
x_t^t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j y_{t-j}. \qquad (8)
$$

b) Finn et uttrykk for koeffisientene $\{a_j\}$ uttrykt ved en eller flere av ϕ, σ^2, K og P.

Vis spesielt at med $\phi = 0.9$ og $\sigma^2 = 5^2$ blir $a_j = 0.1217 \cdot 0.7904^j$ for $j = 0, 1, 2, \ldots$.

c) Bestem $|A(\nu)|^2$ for (stasjonærløsningen av) kalmanfilteret for denne modellen. Uttrykk løsningen som funksjon av en eller flere av ϕ, σ^2, K og P.

Skisser $|A(\nu)|^2$ for følgende to parametersett:

1. $\phi = 0.9$ og $\sigma^2 = 5^2$ [da blir $K = 0.1217$ og $P = 3.043$]
2. $\phi = 0.5$ og $\sigma^2 = 5^2$ [da blir $K = 0.0498$ og $P = 1.246$]

Kommenter kort forskjellen mellom $|A(\nu)|^2$ for de to parametervalgene. Benytt spesielt plottene i figur 1 til å forklare den kvalitative forskjellen mellom $|A(\nu)|^2$ for det to parametersettene.

Vedlegg:

Kalmanfilterligningene:

$$\begin{aligned}
x_t^{t-1} &= \phi x_{t-1}^{t-1} \\
P_t^{t-1} &= \phi P_{t-1}^{t-1} \phi^T + Q \\
x_t^t &= x_t^{t-1} + K_t(y_t - A_t x_t^{t-1}) \\
P_t^t &= [I - K_t A_t] P_t^{t-1} \\
K_t &= P_t^{t-1} A_t^T [A_t P_t^{t-1} A_t^T + R]^{-1}
\end{aligned}$$

Noen summeformler:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{for } |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(bn) = \frac{1 - a\cos b}{1 + a^2 - 2a\cos b} \quad \text{for } |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(bn) = \frac{a \sin b}{1 + a^2 - 2a\cos b} \quad \text{for } |a| < 1$$