



Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:

Arvid Næss

73 59 70 53/ 99 53 83 50

## EKSAMEN I EMNE TMA4285 TIDSREKKEMODELLER

17. desember 2005

Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag

K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Kalkulator HP30S

Ett gult A5-ark med stempel med egne formler og notater

Sensuren faller: 14. januar 2005

**NB: Alle svar skal begrunnes.**

**Notasjon brukt i dette oppgavesettet:**

- $Z_t$  er hvit støy med varians  $\sigma^2$ , dvs.  $Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ .
- $B$  er *backshift*-operatoren, slik at  $B^j X_t \equiv X_{t-j}$ ,  $j \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- ACVF = autokovarians-funksjon, ACF = autokorrelasjons-funksjon.

**Oppgave 1**

Anta at tidsrekken  $X_t$  er en ARMA(2,1)-prosess definert ved

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t; \quad t \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

hvor AR-polynomet  $\phi(z) = 1 - \phi^2 z^2$ , og MA-polynomet  $\theta(z) = 1 + \theta z$ .

a) Hvilke krav må stilles til parametrene  $\phi$  og  $\theta$  for at  $X_t$  skal være en ARMA(2,1)-prosess?

b) Hva betyr det at  $X_t$  er en kausal tidsrekke, og hvordan kan det uttrykkes? Hva med invertibel?

Hvilke tilleggskrav må  $\phi$  og  $\theta$  oppfylle for at  $X_t$  skal være en kausal og invertibel tidsrekke?

I resten av oppgaven skal vi anta at  $0 < |\phi| < 1$ .

c) Bestem ACVF  $\gamma(h)$  til  $X_t$ . Vis først at

$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{1 + \theta^2}{1 - \phi^4} \quad (2)$$

og

$$\gamma(1) = \sigma^2 \frac{\theta}{1 - \phi^2} \quad (3)$$

d) Vis at for  $\theta = 0$ , gjelder ligningen

$$\gamma(2k) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^4} \phi^{2|k|}, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (4)$$

Hva blir  $\gamma(2k+1)$  for  $k \in \mathbf{Z}$  ?

**Oppgave 2**

Med utgangspunkt i 'observasjonene'  $X_1, X_2, \dots, X_n$  fra en stasjonær tidsrekke  $X_t$ , kan ACVF  $\gamma(h)$  og ACF  $\rho(h)$  estimeres som følger ( $h = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_{t+h} - \bar{X}_n)(X_t - \bar{X}_n), \quad (5)$$

og

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad (6)$$

som kan benyttes dersom  $h$  ikke er for stor i forhold til  $n$ , f.eks.  $0 \leq h < n/4$ . Vi skal nå anta følgende resultat: For store  $n$  vil estimatoren  $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\hat{\rho}(1), \hat{\rho}(2), \dots, \hat{\rho}(k))'$  være tilnærmet normalfordelt  $N(\boldsymbol{\rho}, \frac{1}{n}W)$ , hvor  $\boldsymbol{\rho} = (\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(k))'$  og  $W = (w_{ij})$  er en  $k \times k$  kovariansmatrise gitt av Bartlettts formel

$$w_{ij} = \sum_{l=1}^{\infty} \{\rho(l+i) + \rho(l-i) - 2\rho(i)\rho(l)\} \cdot \{\rho(l+j) + \rho(l-j) - 2\rho(j)\rho(l)\} \quad (7)$$

Anta at for observasjonene  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ , har vi funnet at  $\hat{\rho}(1) = 0.438$  og  $\hat{\rho}(2) = 0.145$ .

- a) Anta at observasjonene er generert av en AR(1)-prosess:  $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ , hvor  $|\phi| < 1$ . Sett opp sammenhengen mellom  $\rho(h)$  og  $\phi$ , og vis at

$$\text{Var}[\hat{\rho}(1)] \approx \frac{1}{n}(1 - \phi^2) \quad (8)$$

Bestem et tilsvarende uttrykk for  $\text{Var}[\hat{\rho}(2)]$ . Hint: Bruk f.eks. den observerte verdien  $\hat{\rho}(2) = 0.145$  til å begrunne approksimasjonene.

Konstruér så et tilnærmet 95% konfidensintervall for både  $\rho(1)$  og  $\rho(2)$ . Bruk disse to konfidensintervallene til å diskutere om observasjonene er konsistente med en AR(1)-modell med  $\phi = 0.8$ .

- b) Anta at observasjonene er generert av en MA(1)-prosess. Konstruér et tilnærmet 95% konfidensintervall for både  $\rho(1)$  og  $\rho(2)$ . Bruk disse to konfidensintervallene til å diskutere om observasjonene er konsistente med en MA(1)-modell med  $\theta = 0.6$ .

OPPGITT: 95% konfidens-grenser for en  $N(0, 1)$ -variabel er  $\pm 1.96$ .

### Oppgave 3

- a) Anta at tidsrekken  $X_t$ ,  $t \in \mathbf{Z}$ , er (svakt) stasjonær. Vis at  $\nabla^k X_t = (1 - B)^k X_t$  også er en stasjonær tidsrekke for enhver  $k = 1, 2, \dots$
- b) La tidsrekken  $Y_t$  være definert ved ligningen

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + X_t, \quad t \in \mathbf{Z}, \quad (9)$$

hvor  $X_t$  er stasjonær. Fins det et helt tall  $k_0$  slik at  $\nabla^k Y_t$  er stasjonær for  $k \geq k_0$ , mens  $\nabla^k Y_t$  ikke er stasjonær for  $k < k_0$ . Hva er i så fall  $k_0$ ?